

Súčet absolútnych hodnôt a absolútna hodnota súčtu

Denys Andrukhovskiy denys.andrukhovskiy@trojsten.sk

Letná škola matematiky 2026

Úvod

Určíte ste častokrát sa stretli s takmer očividnou a veľmi dôležitou nerovnosťou:

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad (1)$$

čo platí pre ľubovoľné $a, b \in \mathbb{R}$. V tomto príspevku si ukážeme jej dôsledky, zovšeobecnenia a použitia.

Ukázať nerovnosť 1 vieme uvažovaním rôznych kombinácií znamienok čísel a a b . My však tuto nerovnosť vieme dokázať inak.

Dôkaz. Zapišeme ekvivalentnú nerovnosť: $|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$ (uprava je v skutočnosti ekvivalentná, keďže $|a + b|, (|a| + |b|) \geq 0$). Keď ale roznásobíme zátvorky:

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &\leq (|a| + |b|)^2 \\ (a + b)^2 &\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\ a^2 + 2ab + b^2 &\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \\ 2ab &\leq 2|a||b| \\ ab &\leq |a||b| \\ ab &\leq |ab|, \end{aligned}$$

čo zrejme vždy platí, keďže $x \leq |x|$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. □

Z dôkazu tiež vidíme, že rovnosť sa dosiahne práve vtedy, keď $ab = |ab|$, teda práve vtedy, keď $ab \geq 0$, čo takmer znamená, že a a b majú rovnaký znak¹.

Niektoré dôsledky

Ak vymeníme v nerovnosti 1 b za $-b$, tak dostaneme:

$$|a - b| \leq |a| + |b| \quad (1')$$

Rovnosť sa dosiahne práve vtedy keď $ab \leq 0$. Taktiež platia nerovnosti:

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \quad (2)$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \quad (2')$$

¹keď rátame, že nula je aj kladné, aj záporné číslo.

Cvičenie 1. Dokážte nerovnosti 2 a 2' a zistite, pri ktorých a a b sa dosiahne rovnosť. **Hinty:** 1

Nerovnosť 1 vieme zovšeobecniť pomocou matematickej indukcie:

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \quad (3)$$

pre ľubovoľné $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Rovnosť sa dosiahne práve vtedy, keď $a_i a_j \geq 0$ pre všetky $i, j = 1, 2, \dots, n, i \neq j$.

Cvičenie 2. Dokážte nerovnosť 3.

Teraz sa pozrieme, ako fungujú dokázané nerovnosti.

Niekoľko úloh

Začneme úlohou, v riešení ktorej sa používa metóda dôkazu nerovnosti 1.

Úloha 1 (XV Moskovská matematická olympiáda). Dokážte, že pre také $x, y \in \mathbb{R}, |x| < 1, |y| < 1$ platí:

$$\left| \frac{x - y}{1 - xy} \right| < 1$$

Riešenie. Zapíšeme ekvivalentnú nerovnosť:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x - y}{1 - xy} \right| &< 1 \\ \frac{|x - y|}{|1 - xy|} &< 1 \\ |x - y| &< |1 - xy|, \end{aligned}$$

a umocnime ju na druhú: $(x - y)^2 < (1 - xy)^2$. Stačí len opäť urobiť algebraické manipulácie:

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 &< 1^2 - 2xy + x^2y^2 \\ x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1^2 &> 0 \\ (x^2 - 1)(y^2 - 1) &> 0, \end{aligned}$$

čo zrejme platí, keďže $x^2 < 1$ a $y^2 < 1$. □

Rovnako si všimneme, že nerovnosť platí aj v prípade, keď $|x| > 1, |y| > 1$.

Cvičenie 3. Čo môžeme povedať o reálnych číslach x, y keď $x + y > |1 + xy|$? **Hinty:** 2

Úloha 2 (LIX Moskovská matematická olympiáda). Pre reálne čísla x, y, z platí:

$$|x| \leq |y - z|, |y| \leq |z - x|, |z| \leq |x - y|. \quad (*)$$

Dokážte, že jedno z čísel x, y, z rovná sa súčtu dvoch iných.

Riešenie. Keď aspoň v jednej nerovnosti platí rovnosť, napr., keď $|x| = |y - z|$, to buď $x = y - z$, a teda $y = x + z$, alebo $x = z - y$, a teda $z = x + y$.

Teraz predpokladajme, že všetky nerovnosti * sú ostré. Potom $x^2 < (y - z)^2$, $y^2 < (z - x)^2$, $z^2 < (x - y)^2$, alebo:

$$\begin{cases} (x - y + z)(x + y - z) < 0, \\ (y - z + x)(y + z - x) < 0, \\ (z - x + y)(z + x - y) < 0, \end{cases} \quad (**)$$

teda to, že ľavé strany ** sú záporné. Ale, keď vynásobíme všetky ľavé strany, dostaneme:

$$(x + y - z)^2(x + z - y)^2(y + z - x)^2.$$

Toto číslo je kladné. Preto systém ** nemá riešení, keďže súčin troch záporných čísel je vždy záporný. $\square$

Úloha 3 (LVIII Moskovská olympiáda). Dokážte, že pre ľubovoľné $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí

$$|x| + |y| + |z| \leq |x + y - z| + |x + z - y| + |y + z - x|.$$

Riešenie. Použijeme 1:

$$|x + y - z| + |x + z - y| \geq |x + y - z + x + z - y| = 2|x|.$$

Analogicky,

$$|x + y - z| + |y + z - x| \geq 2|y|, |x + z - y| + |y + z - x| \geq 2|z|.$$

Sčítaním týchto troch nerovností dostaneme nerovnosť zo zadania. $\square$

Úloha 4. Nech máme $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Vieme, že absolútna hodnota súčtu ľubovoľných dvoch týchto čísel nie je väčšia 2. Dokážte, že $|a_1 + a_2 \dots + a_n| \leq n$.

Riešenie. Použijeme nerovnosť 3:

$$\begin{aligned} 2 \cdot |a_1 + a_2 \dots + a_n| &= |2a_1 + 2a_2 \dots + 2a_n| \\ &= |(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{n-1} + a_n) + (a_n + a_1)| \\ &\leq |a_1 + a_2| + |a_2 + a_3| + \dots + |a_n + a_1| \\ &\leq 2n, \end{aligned}$$

z čoho vidíme $|a_1 + a_2 \dots + a_n| \leq n$. $\square$

Úloha 5. Pre ktoré reálne a, b, c rovnosť

$$|ax + by + cz| + |bx + cy + az| + |cx + ay + bz| = |x| + |y| + |z|$$

platí pre ľubovoľné reálne x, y, z ?

Riešenie. Skúsme dosadiť nejaké konkrétne hodnoty x, y, z . Keď dosadíme $x = y = z = 1$, tak vidíme, že musí platiť $|a + b + c| = 1$. Keď dosadíme $x = y = 0, z = 1$, dostaneme $|a| + |b| + |c| = 1$. Keď dosadíme $x = 1, y = -1, z = 0$, dostaneme $|a - b| + |b - c| + |c - a| = 2$. Teraz si môžeme pripomenúť podmienku, kedy nerovnosť 1 sa obratí na rovnosť. Máme $|a + b + c| = |a| + |b| + |c|$, čo znamená, že $ab, bc, ac \geq 0$. Zároveň môžeme skúsiť použiť nerovnosť 1':

$$|a - b| \leq |a| + |b|, |b - c| \leq |b| + |c|, |c - a| \leq |a| + |c|.$$

Keď sčítame ich, dostaneme:

$$2 = |a - b| + |b - c| + |c - a| \leq 2(|a| + |b| + |c|) = 2.$$

Čiže aj tu môžeme použiť podmienku na to, kedy v neostrej nerovnosti nastane rovnosť: musí platiť $ab \leq 0, bc \leq 0, ac \leq 0$.

Z týchto dvoch podmienok ale $ab = bc = ca = 0$. Čiže nejaké dve čísla sú nuly. Keď dosadíme do pôvodnej rovnice napr. $a = 0, b = 0$:

$$|cz| + |cy| + |cx| = |x| + |y| + |z|,$$

z čoho vidíme, že $|c| = 1$, a teda $c = \pm 1$.

Odpoveď: dve z čísel a, b, c sú nuly, tretie je ± 1 . □

Úloha 6. V bodoch $A_1, A_2, \dots, A_n$ na kružnici sú v nejakom poradí rozložené čísla $1, 2, \dots, n$. Aká je najmenšia možná hodnota súčtu n absolútnych hodnôt rozdielov susedných čísel?

Riešenie. Nech číslo 1 je v bode A_1 , a číslo n je v bode A_k . Nech v smere proti hodinovým ručičiek na kruhovom oblúku A_1A_k sú čísla $a_1, a_2, \dots, a_{n-k}$, a v smere hodinových ručičiek: $b_1, b_2, \dots, b_{k-2}$.

Súčet absolútnych hodnôt je potom rovný:

$$\begin{aligned} & |b_1 - 1| + |b_2 - b_1| + \dots + |b_{k-2} - n| + |a_1 - 1| + |a_2 - a_1| + \dots + |a_{n-k} - n| \\ & \geq |b_1 - 1 + b_2 - b_1 + b_3 - b_2 + \dots + b_{k-2} - n + a_1 - 1 + a_2 - a_1 + \dots + a_{n-k} - n| = 2(n - 1) \end{aligned}$$

Posledné, čo treba spraviť, aby vyriešiť úlohy, je ukázať, že existuje taká konfigurácia, kedy výsledok bude $2(n - 1)$. Vidíme, aká? □

Vektory (a komplexne čísla?)

Nerovnosť 1 platí aj pre vektory, napr. 2D alebo 3D. Ukážeme si, prečo.

Dôkaz. Nech $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ sú 2 nenulové vektory. Nech majú spoločný začiatok v bode O .

Keď vektory nie sú kolineárne, tak ich súčet vieme znázorniť pomocou diagonály rovnobežníka, a potom kvôli trojuholníkovej nerovnosti musí $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| < |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$.

Keď sú kolineárne, tak buď sú rovnako nasmerované, a tým pádom $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$, alebo sú nasmerované opačne, a tým pádom $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = ||\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|| < |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$. □

Rovnako vidíme, že z nerovnosti nastane rovnosť práve vtedy keď aspoň jeden vektor je nulový alebo keď vektory sú rovnako nasmerované.

Komplexne čísla

Pre komplexné čísla platí to isté, čo pre vektory, keďže každému komplexnému číslu $z = a + bi$ zodpovedá vektor $\mathbf{z} = (a, b)$.

Niektoré dôsledky

Najprv vieme vyjadriť nerovnosť pre 2D vektory pomocou reálnych čísel. Nech $\mathbf{a} = (a, b)$ a $\mathbf{b} = (c, d)$

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}| & \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \\ \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} & \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}. \end{aligned}$$

Cvičenie 4. Dokážte, že nerovnosti 1', 2, 2', 3 platia aj pre vektory (teda aj pre komplexné čísla). **Hinty:** 3

Zároveň z 3 vyplýva pre vektory $\mathbf{v}_1 = (a_1, b_1), \mathbf{v}_2 = (a_2, b_2), \dots, \mathbf{v}_n = (a_n, b_n)$ nerovnosť:

$$\sqrt{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \dots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

pre ľubovoľné reálne $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$.

Úloha 7. Z bodu O v rovine nakreslili niekoľko vektorov tak, že súčet ich dĺžok rovná sa 4. Dokážte, že možno vybrať niekoľko vektorov tak, že dĺžka ich súčtu je viac ako 1.

Riešenie. Zavedieme pravouhlý súradnicový systém xOy tak, aby ani jeden z vektorov $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ nebude ležať ani na osi Ox , ani na osi Oy ². Okrem toho, rozdelíme všetky vektory na 4 skupiny podľa toho, v akom kvadrante sa vektor nachádza.

Podľa zadania $\sum_{i=1}^n |\mathbf{a}_i| = 4$. Nech $\mathbf{a}_i = (x_i, y_i)$. Vtedy $|a_i| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$. Podľa toho, ako sme vybrali súradnicový systém, musí platiť $\sqrt{x_i^2 + y_i^2} < |x_i| + |y_i|$ (prečo?). Preto

$$4 = \sum_{i=1}^n |\mathbf{a}_i| < \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i|.$$

Potom ale zo štyroch polpriamok musí existovať aspoň jedna taka, že súčet dĺžok projekcií vektorov na túto polpriamku je viac ako 1. Vtedy ale dĺžka súčtu vektorov, čo ležia v zodpovedajúcej polrovine bude väčšia ako 1, keďže dĺžka súčtu projekcií je rovná súčtu dĺžok projekcií jednotlivých vektorov, a ta bude ostro väčšia ako 1. $\square$

Ešte jedna nerovnosť

Účastníkom 10. celozväzovej (sovietskej) matematickej olympiády bol ponúknutý pozoruhodný problém.

Úloha 8. V rovine máme vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$, súčet ktorých je $\mathbf{0}$. Dokážte nerovnosť:

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{b} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}|. \quad (4)$$

Predtým, ako sa pustiť do dôkazu, urobíme si niekoľko poznámok.

Nech $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sú vektory v rovine. Keď dosadíme v 4 $\mathbf{d} = -\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, dostaneme nerovnosť:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| + |\mathbf{b} + \mathbf{c}| + |\mathbf{c} + \mathbf{a}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|. \quad (4')$$

Dokážeme najprv nerovnosť 4', a teda aj 4, pre reálne čísla.

Úloha 9. Dokážte, že nerovnosť

$$|a + b| + |b + c| + |c + a| \leq |a| + |b| + |c| + |a + b + c|$$

platí pre všetky reálne a, b, c .

²to, že taký systém existuje, je pomerne zrejme: vektorov máme konečný počet, čiže len konečne množstvo možných nakreslení osi bude zlé, ale možnosti nakresliť osi je nekonečne veľa

Riešenie. Nerovnosť určite platí, keď všetky čísla sú nezáporné (resp. nekladné), a taktiež keď jedno z nich rovná sa nule.

Ak nerovnosť platí pre nejakú trojicu a, b, c , tak platí aj pre trojicu $-a, -b, -c$. Teda bez ujmy na všeobecnosti nech $a > 0, b > 0, c < 0$. Potom môžeme vydeliť číslom a obidve strany nerovnosti, a urobiť substitúciu $x = \frac{b}{a} > 0, y = \frac{c}{a} < 0$.

Dostali sme teda nerovnosť

$$|1+x|+|x+y|+|1+y| \leq 1+|x|+|y|+|1+x+y|,$$

ktorú treba dokázať pre $x > 0, y < 0$. Očividne $|x| = x$, teda stačí dokázať

$$|x+y|+|1+y| \leq |y|+|1+x+y|.$$

Ak $y \geq -1$, tak $|1+x+y| = |x+(1+y)| = |x|+|1+y|$, keďže $x, (1+y) \geq 0$, tým pádom nerovnosť sa zredukuje na $|x+y| \leq |x|+|y|$, čo je 1.

Ak $y < -1$, tak $|1+y| = -1-y$, a potom dostaneme nerovnosť $|1+x+y| \geq |x+y|-1$, čo platí kvôli 2. $\square$

Pomocou dokázanej nerovnosti sa dá dokázať aj nerovnosť pre vektory. Ten dôkaz, aj keď je efektný a má hlboké myšlienky, vyžaduje poznatky z integrálov. Preto čitateľ je odkázaný na literatúru.

My však vrátime sa k riešeniu úlohy. Kľúčovým rozdielom pre dokazovanie nerovnosti pre vektory je to, že nevieme jednoducho sa zbaviť funkcie $|\cdot|$, kde (možno) treba sa pozrieť len na 2 prípady.

Čiže, treba hľadať iné riešenie. Napr., geometrické.

Riešenie. Všimneme si niekoľko vecí. Najprv, nerovnosť platí pre štvoricu $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ práve vtedy, keď platí pre nejakú permutáciu tejto štvorice. Napríklad, keďže $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$, tak $\mathbf{a} + \mathbf{b} = -\mathbf{c} - \mathbf{d}$, teda $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{c} + \mathbf{d}|$. Teda z nerovnosti

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{b} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}|,$$

vieme dostať

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}| \geq |\mathbf{b} + \mathbf{c}| + |\mathbf{b} + \mathbf{d}| + |\mathbf{a} + \mathbf{b}|,$$

čo je nerovnosť pre štvoricu $\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{b}$.

Okrem toho, ak nejaký vektor je nulový (napr. $\mathbf{d} = \mathbf{0}$), tak rovnosť triviálne platí:

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{0}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{0}| + |\mathbf{b} + \mathbf{0}| + |\mathbf{c} + \mathbf{0}|.$$

Ak súčet niektorých dvoch vektorov je nulový (napr. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$), tak potom súčet dvoch iných je tiež nulový, a preto platí:

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + 2|\mathbf{d}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{b} + \mathbf{d}|.$$

V tomto bode teda môžeme predpokladať, že ani jeden vektor nie je nulový, a súčet ľubovoľných dvoch tiež nie je nulový.

Nakreslime teda postupne $\vec{AB} = \mathbf{a}, \vec{BC} = \mathbf{b}, \vec{CD} = \mathbf{c}, \vec{DA} = \mathbf{d}$. Dostaneme uzavretú lomenú čiaru. Ak tato čiara pretne samu seba, tak to by mohlo ísť. Naozaj, nech AB pretína CD v bode E . Podľa trojuholníkovej nerovnosti musí platiť $AC \leq AE + EC, BD \leq BE + ED$. Potom $AC + BD \leq AE + EB + CE + ED = AB + CD$. Ďalej: $\vec{CA} = \mathbf{c} + \mathbf{d}, \vec{DB} = \mathbf{d} + \mathbf{a}$, čiže $CA = |\mathbf{c} + \mathbf{d}|, DB = |\mathbf{d} + \mathbf{a}|, AB = \mathbf{a}, CD = \mathbf{c}$. Preto

$$|\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{c}|.$$

Keď pripočítame trojuholníkovú nerovnosť pre $\mathbf{b}, \mathbf{d}$, dostaneme požadovanú nerovnosť.

Aby dokončiť dôkaz, stačí potom ukázať si, ako sa dá vhodnou permutáciou nakresliť vektory tak, aby sa pretínali. $\square$

Cvičenie 5 (Koniec dôkazu úlohy). Ukážte, že pre ľubovoľné vektory **a**, **b**, **c**, **d** zo zadanie vyššie vieme nakresliť lomenú čiaru tak, aby čiara pretla seba.

Riešime úlohy

Cvičenie 6. Vyriešte rovnice:

1. $|x^2 - 3x + 1| + |2x^2 - x - 1| = |3x^2 - 4x|;$
2. $|x - 1| + |x + 1| + |x - 2| + |x + 2| + \dots + |x - 100| + |x + 100| = 200x$

Cvičenie 7. Vyriešte nerovnosti:

1. $\left| |1 - x^2| - |x^2 - 3x + 2| \right| \geq 3|x - 1|;$
2. $\sqrt{1 - \sin 2x} + |\sin x| \leq \cos x;$
3. $\left| 2 \sin x + 2 \cos x + \tan x + \cot x + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right| \leq 2.$

Cvičenie 8. Nájdite minimum funkcie:

1. $y = |x - 3| + |x| + |x + 3| + |x + 5|;$
2. $y = |x^2 + 3x + 1| + |x^2 - 1| + |3x - 2|.$

Pre ktoré x funkcie nadobúdajú tie minima?

Cvičenie 9. Dokážte nerovnosť:

$$\frac{|a|}{1 + |b|} + \frac{|b|}{1 + |c|} + \frac{|c|}{1 + |a|} \geq \frac{|a + b + c|}{1 + |a + b + c|}.$$

Hinty

1. Dosadíte $x, y, x - y, x + y$ do nerovnosti 1, resp. 1'. Alebo priamo urobte rovnaký trik, ako v dôkaze nerovnosti 1.
2. Zopakujte postup z úlohy.
3. Môžeme zopakovať postup z predchádzajúcich dôkazov?