

Funkcionálne rovnice a iné

Dominik Rigasz (dominik.rigasz@trojsten.sk)

1 Všeobecné techniky (sudoku)

Najzákladnejšou a najvšeobecnejšou metódou je **dosadzovanie**. Dobré rady, ako a čo dosadzovať:

- **Dosadzujeme pekné konštanty** (neutrálne prvky vzhľadom na sčítanie, násobenie) ako 0, 1, -1 , podľa situácie aj iné. Snažíme sa v nich vypočítať funkčné hodnoty.
- Snažíme sa **vynulovať alebo skonštantniť niektoré výrazy** v argumentoch funkcií (napríklad keď máme $f(x + y)$, tak môžeme skúsiť $y := -x$).
- Snažíme sa **eliminovať výrazy na opačných stranách** rovnice (napríklad keď máme na jednej strane $f(x + 2f(x))$ a na druhej $f(y + f(x))$, tak voľbou $y := x + f(x)$ tieto výrazy eliminujeme).
- **Vyjadrovanie výrazov dvoma spôsobmi**. Keď napríklad máme vzťah $f(x + y) = V(x, y)$, tak $f(4x) = V(3x, x)$, ale rovnako $f(4x) = V(2x, 2x)$, teda $V(3x, x) = V(2x, 2x)$.
- **Symetrie v premenných**. Keď napríklad máme $xyf(f(x)f(y)) = f(x) + y$, tak zámenou x, y sa ľavá strana nezmení a porovnaním dostaneme $f(x) + y = f(y) + x$. Často si musíme symetriu v rovnici dotvoriť nejakým dosadením.

Často je veľmi užitočné robiť úvahy o **vlastnostiach** hľadanej funkcie, ktoré poznáte zo školy. Najčastejšie a najpoužívanéjšie sú:

- **Párnosť a nepárnosť**. Dajú sa dokazovať napríklad z rovníc $f(x^2) = xf(x)$, resp. $f(x^2) = x^2f(x)$, dosadeniami, v ktorých zmeníme znamienka niektorých premenných.
- **Prostosť (injekcia)**. Dokázať sa dá zo vzťahov, kde máme všetky x -ká zabalené v f , až na jedno. Sila injektivity je, že nám dovoľuje škrtiť f -ká. Napríklad z $f(f(x)) = f(x)$ dostaneme $f(x) = x$. **Prostosť často v úlohách súvisí s periodicitou** (MEMO 2024 T-2).
- **Na (surjekcia)**, resp. uvažovanie oboru hodnôt. Táto vlastnosť sa dá vidieť z rovníc, kde máme nejakú voľnú premennú mimo f -iek. Často nevieme dokázať surjektivitu funkcie na celý obor. Niekedy však stačí poznať len časť oboru hodnôt. Typickým príkladom je ukázať, že funkcia má **nulový bod**.

Existuje množstvo ďalších trikov a figlôv, kreativite sa medze nekladú. Z času na čas, najmä v ťažších úlohách, sa dajú uplatniť aj nasledujúce metódy:

- **Vyriešiť rovnicu v menšom obore** (napríklad v $\mathbb{Q}$) a rozšíriť riešenie na väčší obor (napríklad $\mathbb{R}$).

- Nielen s predchádzajúcim bodom je spojená aj **matematická indukcia**. Napríklad z rovnice $f(x+1) = f(x)+1$ získame $f(x+n) = f(x)+n$. Aj takéto **malé zovšeobecnenia sa môžu hodiť**.
- Použitie monotónnosti, či iných nerovností týkajúcich sa funkčných hodnôt. **Nerovnosti sú obzvlášť užitočné pri funkcionálkach nad $\mathbb{R}^+$** .
- Použitie **periodicity** funkcie. Platí, že ak má funkcia každú možnú reálnu periódu, tak už je konštantná.
- Použitie **fixných bodov** (bodov, kde $f(t) = t$).
- **Dosadiť zadanie samé do seba**, aplikovať podmienku samú na seba. Napríklad ak máme $f(x+y) = f(x) - f(x+x^2f(y))$ (KMS 46-Z2-10) tak môžeme skúsiť $y := x^2f(y)$, čím využijeme podmienku v samej sebe, a možno niečo dostaneme.
- **Definovať nové funkcie** – napríklad keď tušíme, že $f(x) = x^2$ je jediné riešenie, tak nie je na škodu označiť $g(x) = f(x) - x^2$ a prepísať pôvodnú rovnicu v g , o ktorej chceme dokázať, že je nulová. Často to nemusí priniesť nič zásadne nové, ale môže to situáciu výrazne sprehľadniť.
- Dostať additivitu (**Cauchyho funkcionálna rovnica**).

2 Klasiky (ľahšie úlohy)

Pri úlohách, kde je iba rovnice vždy hľadáme všetky funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí daná rovnosť.

Cvičenie 1. $f(xy+1) + f(x+y) = (f(x)+1)(y+1)$

Cvičenie 2. $f(f(x) + f(y)) = f(x) + y$

Cvičenie 3 (Varovná). $f(x + f(y)) = f(x) + f(y)^2 + 2xf(y)$

Cvičenie 4 (Varovná). $f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2$

Cvičenie 5. Nájdite všetky rastúce funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $f(f(x)) = x$.

Cvičenie 6. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ platí

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x.$$

Cvičenie 7. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$(1 + yf(x))(1 - yf(x+y)) = 1.$$

Cvičenie 8. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{Q}$ platí

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Cvičenie 9. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(y - xy) = f(x)y + (x - 1)^2f(y).$$

(CKMO 2017 P3)

Cvičenie 10. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(x)f(y) = f(y)f(xf(y)) + \frac{1}{xy}.$$

(CKMO 2011 P6)

3 A-funkcionálky

Cvičenie 11. Pre všetky dvojice (α, β) nezáporných reálnych čísel, pre ktoré $\alpha + \beta \geq 2$, nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spĺňajúce pre všetky reálne čísla x, y nerovnosť

$$f(x)f(y) \leq f(xy) + \alpha x + \beta y.$$

(MEMO 2023 I-1)

Cvičenie 12. Určte všetky $k \in \mathbb{N}_0$, pre ktoré existuje funkcia $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ taká, že $f(2024) = k$ a pre všetky $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$f(f(n)) \leq f(n+1) - f(n).$$

(MEMO 2024 I-1)

Cvičenie 13. Nech $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ je funkcia taká, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$yf^{2025}(x) \geq xf(y).$$

Ukážte, že existuje prirodzené číslo n_0 také, že pre všetky prirodzené $n \geq n_0$ a všetky reálne $x > 0$ platí

$$f^n(x) \geq x.$$

(MEMO 2025 I-1)

Cvičenie 14 (Ťažšia). Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$, platí

$$f(xy) + f(x) = f(y)f(xf(y)) + f(x)f(y)$$

a existuje nanajvýš jedno číslo $a \in \mathbb{R}^+$, pre ktoré $f(a) = 1$.

(MEMO 2025 T-2)

Cvičenie 15. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$yf(x+1) = f(x+y-f(x)) + f(x)f(f(y)).$$

(MEMO 2024 T-2)

Cvičenie 16. Daná je funkcia $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taká, že pre všetky $m, n \in \mathbb{N}$ platí

$$f(n+f(n))(m+f(n)) = (f(2m) + 2f(n))f(n).$$

Určte všetky možné hodnoty (a) $f(2022)$, (b) $f(2023)$.

(MBL-B 2023 QQ)

Cvičenie 17. Nájdite všetky funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(xy + f(x^2)) = xf(x+y).$$

(Výberko 2025 A2)

Cvičenie 18. Nech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia taká, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x+y)f(x-y) \geq f(x)^2 - f(y)^2.$$

Predpokladajme, že existujú nejaké $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, pre ktoré je nerovnosť vyššie ostrá. Ukážte, že buď pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) \geq 0$, alebo pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $f(x) \leq 0$.

(ISL 2023 A2)

Cvičenie 19. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$x(f(x) + f(y)) \geq (f(f(x)) + y)f(y).$$

(ISL 2023 A4)

Cvičenie 20 (Ťažšia). Nájdite všetky funkcie $f : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ také, že pre všetky $x, y \in (0, \infty)$ platí

$$f(x + yf(x)) = f(x)f(x + y).$$

(CAPS 2025 P6)

Cvičenie 21 (Ťažšia). Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(x + yf(x)) = xf(1 + y).$$

(EMC 2024 Senior P4)

Cvičenie 22. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(xy + f(x)) = xf(y) + 2.$$

(USAMO 2023 P2)

Cvičenie 23. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(x) = f(x + y) + f(x + x^2f(y)).$$

(KMS 46-Z2-P10)

Cvičenie 24 (Ťažšia). Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(xf(y)) + f(y) = f(x + y) + f(xy).$$

(iKS 14-3)

Cvičenie 25. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(xf(y) + x^2 + y) = f(x)f(y) + xf(x) + f(y).$$

(KMS 47-Z2-P10)

Cvičenie 26 (Ťažšia). Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$xf(x + y) + f(xf(y) + 1) = f(xf(x)).$$

(Výberko 2026 A3)

Cvičenie 27. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ také, že pre všetky $x \in \mathbb{R}^+$ existuje práve jedno $y \in \mathbb{R}^+$ spĺňajúce

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

(IMO 2022 P2)

Cvičenie 28. Určte všetky funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ktoré pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$ spĺňajú

$$f(f(x) + y) = f(x)^2 + 2yf(x) + f(y).$$

(IMSC 2026 Mock A2)

Cvičenie 29. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(y + f(x)) = f(x) + yf(y) + 3x.$$

(Kvalifikácia 2025 A2)

Cvičenie 30. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{Q}$ platí

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2.$$

(EGMO 2021 P2)

Cvičenie 31. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ platí

$$\sqrt{\frac{x^2 + f(y)^2}{2}} \geq \frac{f(x) + y}{2} \geq \sqrt{xf(y)}.$$

(IMO 2026 P5)

4 C-funkcionálky

Pri iteračných funkcionálkach (teda takých, kde sa nám vyskytuje f vnorené do seba veľa krát) sa často oplatí situáciu znázorniť grafom, konkrétne orientovaným grafom kde vrcholy sú prvky definičného oboru f , a šípka ide z x do y práve vtedy ak $f(x) = y$.

Definícia 1. Nech f je funkcia. Pre prirodzené n budeme značiť

$$f^n(x) = \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_{n\text{-krát}}(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x) \dots))}_{n\text{-krát}},$$

teda f aplikované n -krát na x , a pre $n = 0$ dodefinujeme $f^0(x) = x$. Keby sme náhodou chceli zapísať n -tú mocninu hodnoty $f(x)$, napíšeme $(f(x))^n$.

Všimnime si niekoľko užitočných pozorovaní:

- Funkciám $f : M \rightarrow M$ zodpovedajú práve tie grafy na množine vrcholov M , kde z každého vrcholu vychádza práve jedna šípka.
- Pre funkciu na konečnej množine sa cesta z ľubovoľného vrcholu zacyklí.
- Nech x leží v cykle dĺžky k na funkcii f . Potom $f^n(x) = x$ práve vtedy, keď $k \mid n$.
- Funkcia uvažovaná ako graf je: (1) **prostá** (injektívna), keď do každého vrcholu vedie najviac jedna šípka, (2) **na** (surjektívna), keď do každého vrcholu vedie aspoň jedna šípka, (3) **bijektívna**, keď do každého vrcholu vedie práve jedna šípka.
- Nech M je konečná množina. Potom je funkcia $f : M \rightarrow M$ prostá práve vtedy, keď je na.

- Bijekcia pozostáva len z navzájom disjunktných cyklov a obojstranných reťazí.
- Prostá funkcia pozostáva len z navzájom disjunktných cyklov, jednostranných reťazí a obojstranných reťazí. Počiatočné vrcholy jednostranných reťazí sú pritom presne tie prvky, ktoré chýbajú v obore hodnôt.

Úlohy s iteráciami dokážu byť dosť rôznorodé a okrem všeobecných funkcionálových trikov a uvedených pozorovaní je častý aj **extremálny princíp**: Na cykloch sa môže oplatíť pozrieť sa na najväčší alebo najmenší prvok. Rovnako tak môže niekedy pomôcť minimálny prvok oboru hodnôt. Častá je tiež **indukcia**.

Úloha 1. Je daná funkcia $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Skonstruujte $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ takú, že $f^n(x) = 0$ má presne $g(n)$ riešení pre každé $n \in \mathbb{N}$.

Úloha 2. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, ktoré pre všetky $n \in \mathbb{N}$ spĺňajú

$$f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n.$$

Úloha 3. Rozhodnite, či existuje funkcia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ spĺňajúca $f(f(n)) = 3n$ pre všetky $n \in \mathbb{Z}$.

Cvičenie 32. Sú dané $a, k \in \mathbb{N}$. Dokážte, že funkcia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ spĺňajúca $f^k(n) = n + a$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje práve vtedy, keď $k \mid a$.

Cvičenie 33. Nájdite všetky prirodzené k , pre ktoré existujú funkcie $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ také, že g nadobúda nekonečne veľa hodnôt a $f^{g(n)}(n) = f(n) + k$ pre každé $n \in \mathbb{N}$.

(MEMO 2020 I-1)

Cvičenie 34. Nájdite všetky polynómy $P \in \mathbb{Z}[X]$ také, že pre všetky $x \in \mathbb{Z}$ a všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $n \mid P^n(x) - x$.

(Israel TST 2020)

Cvičenie 35. Daná je konečná (neprázdna) množina S . Povieme, že funkcia $f : S \rightarrow S$ je n -tá mocnina, ak existuje funkcia $g : S \rightarrow S$ taká, že $f(x) = g^n(x)$ pre všetky $x \in S$. Ukážte, že ak $f : S \rightarrow S$ je n -tou mocninou pre všetky $n \in \mathbb{N}$, tak potom $f(f(x)) = f(x)$ pre všetky $x \in S$.

(Baltic Way 2024)

Cvičenie 36. Nech S je konečná množina, a nech A je množina všetkých funkcií z S do S . Nech $f \in A$, a nech $T = f(S)$ je obraz množiny S pod mapovaním f . Predpokladajme, že $f \circ g \circ f \neq g \circ f \circ g$ pre každú funkciu $g \in A \setminus \{f\}$. Ukážte, že $f(T) = T$.

(ISL 2017 A3)

Cvičenie 37. Nech $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Funkcia $f : S \rightarrow S$ je *krutoprísna*, pokiaľ pre každé $k \in S$ platí $f^{f(k)}(k) = k$. Dokážte, že každá krutoprísna funkcia má aspoň $P + 1$ pevných bodov, kde P je počet prvočísel v intervale $(\sqrt{n}, n]$.

(PraSe 36-4p-7)

Cvičenie 38. Určte všetky podmnožiny S množiny $\{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$, pre ktoré existuje funkcia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taká, že

$$S = \{f(a+b) - f(a) - f(b) \mid a, b \in \mathbb{N}\}.$$

(ISL 2024 A4)

Cvičenie 39. Striktne rastúcu funkciu $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ nazveme *centrálnou*, ak pre všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{f(1) + f(2) + \dots + f(f(n))}{f(n)} = f(n).$$

Ukážte, že existuje (fixná) funkcia $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taká, že pre ľubovoľnú centrálnu funkciu f existuje nekonečne veľa čísel $n \in \mathbb{N}$ takých, že $g(n) = f(n)$.

(EGMO 2025 P2)

Cvičenie 40. Nech $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je funkcia taká, že pre ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$ platí, že množina

$$\{f(1), f(2), \dots, f(k)\}$$

obsahuje práve $f(f(k))$ rôznych prvkov. Ukážte, že $f(f(f(k))) = f(k)$ platí pre všetky $k \in \mathbb{N}$.

(EMC 2025 Senior P2)

Cvičenie 41. Konečná množina S kladných celých čísel sa nazýva *žirafová*, ak S obsahuje celé číslo $|S|$, kde $|S|$ označuje počet rôznych prvkov v S . Majme funkciu $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, takú že pre ľubovoľnú žirafovú množinu S platí, že množina $f(S)$ je tiež žirafová, kde $f(S) := \{f(a) : a \in S\}$. Nájdite všetky možné hodnoty $f(2024)$.

(iKS 14-1)

Cvičenie 42. Funkcia $f : A \rightarrow A$ sa nazve *A-dobrá*, ak $f(a^2 + b) = f(b^2 + a)$ pre všetky $a, b \in A$. Aký najväčší počet rôznych hodnôt môže byť medzi číslami $f(1), \dots, f(2023)$, kde f je *A-dobrá* funkcia? Riešte pre (a) $A = \mathbb{Z}$, (b) $A = \mathbb{N}$.

(MEMO 2023 T-1)