

Nekonečná kombinatorika

Cvičenia

Meno: _____

1. Nájdite bijekciu medzi intervalmi

$$(0, 1] \quad \text{a} \quad (0, 1).$$

2. Zafarbite všetky body mriežky $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ čiernou a bielou tak, aby platilo:

- v každom riadku sa nachádza iba konečne veľa čiernych bodov,
- v každom stĺpci sa nachádza iba konečne veľa bielych bodov.

3. Na nejakom celom čísle číselnej osi sedí neviditeľná blcha. Pri každom skoku sa posunie o pevne dané nenulové prirodzené číslo n doľava alebo doprava (smer si môže zakaždým zvoliť nanovo).

Mirek po každom skoku položí pascu na ľubovoľné celé číslo. Blchu chytí, ak položí pascu priamo na miesto, kde sa blcha nachádza, alebo ak blcha počas niektorého zo svojich skokov preskočí na pole, na ktorom už predtým ležala pasca.

Dokážte, že Mirek vie zvoliť stratégiu kladenia pascí tak, aby blchu po konečne mnohých skokoch určite chytil, hoci nepozná počiatočnú polohu blchy, číslo n ani smery jednotlivých skokov.

4. Prirodzené čísla rozdelíme na konečne veľa disjunktných množín. Dokážte, že aspoň jedna z nich obsahuje nekonečne veľa násobkov každého prirodzeného čísla.
5. Dokážte, že existuje nespočetný systém podmnožín množiny $\mathbb{N}$, pričom prienik ľubovoľných dvoch rôznych množín zo systému je konečný.
6. Dokážte, že na množine $\mathbb{N}$ existuje nespočetne veľa navzájom neizomorfných lineárnych usporiadaní.
7. Uvažujme bipartitný graf.

Jednu časť vrcholov tvoria všetky nekonečné postupnosti núl a jednotiek. Druhú časť tvoria všetky konečné postupnosti núl a jednotiek.

Každá nekonečná postupnosť je spojená hranou práve so všetkými svojimi konečnými začiatočnými úsekmi.

Dokážte, že v tomto grafe existuje párovanie, ktoré nasýti všetky vrcholy predstavujúce konečné postupnosti.

8. Nájdite nekonečnú postupnosť

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

takú, že pre každé prirodzené číslo k obsahuje postupnosť

$$a_1 + k, a_2 + k, a_3 + k, \dots$$

iba konečne veľa prvočísel.

9. **Hra na nekonečnej trojuholníkovej mriežke.**

Alice a Bob hrajú hru na nekonečnej trojuholníkovej mriežke.

Spočiatku sú dva susedné vrcholy označené 1 a -1 zafarbené načerveno a vrchol medzi nimi označený 0 je zafarbený namodro.

Potom sa Alice a Bob striedajú v ťahoch. Alice vždy vyberie jeden dosiaľ neofarbený vrchol a zafarbí ho načerveno, Bob vždy vyberie jeden dosiaľ neofarbený vrchol a zafarbí ho namodro. Začína Alice.

Alice vyhrá, ak sa jej podarí vytvoriť červenú cestu spájajúcu vrcholy 1 a -1 . Bob vyhrá, ak tomu dokáže zabrániť.

Určte, ktorý z hráčov má vyhrávajúcu stratégiu.