

Celá a desatinná časť čísla

Denys Andrukhovskiy denys.andrukhovskiy@trojsten.sk

Letná škola matematiky 2026

Abstrakt

Pri riešení algebraických alebo niekedy aj kombinatorických úloh (občas celkom prirodzene) sa stretávame s typom úloh, kde treba od čísla x zobrať jeho celú časť čísla (najväčšie celé číslo také, ktoré nie je väčšie ako x). Na prednáške si ukážeme algebraické úlohy na celú a desatinnú časť. Občas úloha bude iba algebraická, ale občas argument bude založený na kombinatorickom triku: počítaní dvoma spôsobmi.

Úvod

Tieto materiály sú založené na zdroji [1].

Funkcie, spomenuté v názve prednášky, častokrát stretávame v rôznych oblastiach matematiky – napríklad v algebre, analýze, teórii čísel, kombinatorike. O týchto funkciách a o úlohách, ktoré sa dá pomocou nich riešiť, si dnes sa porozprávame.

Celá časť čísla a jej príbuzní

Definícia 1. Celá časť čísla $x \in \mathbb{R}$ nazývame také najväčšie celé číslo $a \in \mathbb{Z}$, ktoré nie je väčšie ako x . Značíme celú časť čísla x ako $[x]$ ¹.

Napríklad, $[-1.5] = -2$, $[-1] = -1$, $[0] = 0$, $[1.5] = 1$, $[\pi] = 3$. Kvôli definícií, rovnosť $[x] = k$ znamená $k \leq x < k + 1$.

Cvičenie 1. Nakreslite graf $y = [x]$.

Taktiež občas môžeme sa stretnúť z funkciou $[x]$ ². Ta sa definuje podobne.

Definícia 2. Hornou celou časťou čísla $x \in \mathbb{R}$ nazývame také najmenšie celé číslo $a \in \mathbb{Z}$, ktoré nie je menšie ako x . Značíme hornú celú časť čísla x ako $\lceil x \rceil$.

Napríklad, $\lceil -1 \rceil = -1$, $\lceil -\frac{1}{2} \rceil = 0$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 2.5 \rceil = 3$.

Cvičenie 2. Ako súvisia funkcie $y = [x]$ a $y = \lceil x \rceil$?

Cvičenie 3. Vyriešte rovnice:

1. $\left[\frac{x^2 - 3x}{2} \right] = 1$;

2. $\left\lceil \frac{3x - 1}{3} \right\rceil = 5$.

¹Niekedy sa používa alternatívne označenie: $\lfloor x \rfloor$. Hovorí sa obyčajne pri tomto označení "floor of x "

²"ceiling of x "

Všimneme si základné fakty o $[\cdot]$:

- $[x] \leq x \leq [x] + 1$;
- pre všetky reálne x a celé a platí $[x + a] = [x] + a$;
- $[x + y] \geq [x] + [y]$.

Cvičenie 4. Dokážte, že ak $[x + a] = [x] + [a]$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, tak a je celé číslo.

Cvičenie 5. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne x, y platí:

$$[x] + [y] + [x + y] \leq [2x] + [2y]$$

Desatinná časť čísla

Pri riešení úloh vyššie nám pomohlo použiť *desatinnú časť čísla*.

Definícia 3. Desatinná časť čísla $x \in \mathbb{R}$ je $x - [x]$. Značíme desatinnú časť čísla x ako $\{x\}$.

Všimneme si základné vlastnosti funkcie $\{\cdot\}$:

- rovnosť $\{x\} = x$ platí práve vtedy, keď $0 \leq x < 1$.
- $\{x\} = \{y\}$ práve vtedy keď $x - y = n$, kde $n \in \mathbb{Z}$.
- Ako dôsledok, platí $\{x\} = \{x + 1\}$.

Cvičenie 6. Vyriešte rovnice:

1. $\{3x\} = \frac{1}{2}$
2. $\{6x\} + \{x\} = 1$

Cvičenie 7. Dokážte, že pre prirodzené k a reálne x platí $\{k\{x\}\} = \{kx\}$.

Cvičenie 8. Vyriešte rovnicu $\{3\{x\}\} = x$.

Úlohy

Úloha 1. Vyriešte rovnicu:

$$x^2 - 10[x] + 9 = 0$$

Riešenie. Vieme, že $[x] \leq x$. Potom $-x \leq -[x]$. Teda:

$$x^2 - 10x + 9 \leq x^2 - 10[x] + 9 = 0$$

Riešením $x^2 - 10x + 9 \leq 0$ je interval $[0, 9]$.

Vyskúšame si teraz všetky možnosti pre $[x]$:

$[x] = 1$	$x^2 - 10 + 9 = 0$	$\implies x = 1$	$x = 1$ je riešenie
$[x] = 2$	$x^2 - 20 + 9 = 0$	$\implies x = \sqrt{11}$	$x \geq 3$, x nie je riešenie
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[x] = 9$	$x^2 - 90 + 9 = 0$	$\implies x = 9$	$x = 9$ je riešenie

Odpoveď: $\boxed{x = 1, x = \sqrt{61}, x = \sqrt{71}, x = 9}$.

Úloha 2. Vyriešte rovnicu

$$\left[\frac{2x+1}{3} \right] = [x]$$

Riešenie. Nech $[x] = k$, $k \in \mathbb{Z}$. Potom:

$$\begin{cases} k \leq \frac{2x+1}{3} < k+1 \\ k \leq x < k+1 \end{cases}$$

Skúsme zjednodušiť tento systém pre x :

$$\begin{cases} \frac{3k-1}{2} \leq x < \frac{3k+2}{2} \\ k \leq x < k+1 \end{cases}$$

Ako v úlohe vyššie chceli by sme ohraničiť k na nejaké hodnoty. Ako ohraničíme k ? Najľahší spôsob je vymeniť štyri nerovnosti krížom:

$$\begin{cases} \frac{3k-1}{2} \leq x < k+1 \\ k \leq x < \frac{3k+2}{2} \end{cases}$$

Zabudnime na x :

$$\begin{cases} \frac{3k-1}{2} < k+1 \\ k < \frac{3k+2}{2} \end{cases}$$

Teraz robíme len úpravy:

$$\begin{cases} 3k-1 < 2k+2 \\ 2k < 3k+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k < 3 \\ -2 < k \end{cases}$$

Teraz stačí len vyskúšať a overiť, pre ktoré k rovnica v skutočnosti má riešenie.

Odpoveď: $\boxed{-1 \leq x < -\frac{1}{2}; 0 \leq x < 2; \frac{5}{2} \leq x < 3}.$

Úloha 3. Vyriešte rovnicu

$$[x^2] = 2[x]$$

Riešenie. Nech $[x] = k$, $\{x\} = \alpha$. Potom:

$$\begin{aligned} [(k+\alpha)^2] &= 2k \\ [k^2 + 2\alpha k + \alpha^2] &= 2k \\ [2\alpha k + \alpha^2] &= 2k - k^2 \end{aligned}$$

Mohli by sme teraz nejak rozumne ohraničiť ľavú časť rovnosti? Funkcia napravo je veľmi rýchlo klesajúca (pre kladné k , resp. rastúca pre záporné). Môže byť hodnota vľavo príliš malou? Vždy platí $0 \leq \alpha < 1$. Vieme ohraničiť k ? $2k = [x^2]$. $[x^2]$ je určite nezáporné, keďže $x^2 \geq 0$. Tým pádom $2k \geq 0$, teda $k \geq 0$. Ale potom $2\alpha k + \alpha^2 \geq 0$, ako súčin a súčet nezáporných čísel. Číže $2k - k^2 \geq 0$.

$$\begin{aligned} 2k - k^2 &\geq 0 \\ 0 &\geq k^2 - 2k \\ 1 &\geq k^2 - 2k + 1 \\ 1 &\geq (k-1)^2 \end{aligned}$$

Číže k môže nadobúdať len hodnoty 0, 1, 2. Vyriešením kvadratických nerovností pre jednotlivé prípady dostaneme odpoveď. Napr., pre prípad $k = 1$:

$$\begin{aligned} \lfloor 2\alpha + \alpha^2 \rfloor &= 2 \cdot 1 - 1^2 \\ \lfloor 2\alpha + \alpha^2 \rfloor &= 1 \\ 1 &\leq 2\alpha + \alpha^2 < 2 \end{aligned}$$

Riešením týchto nerovností dostaneme že $\sqrt{2} - 1 \leq \alpha < \sqrt{3} - 1$, ale $0 \leq \alpha < 1$ z definície, čiže vo výsledku máme, že $\sqrt{2} - 1 \leq \alpha < 1$. Tým pádom $x = k + \alpha$, čiže $\sqrt{2} \leq x < 2$.

Ostatné prípady sú analogické.

Odpoveď: $\boxed{0 \leq x < 1; \sqrt{2} \leq x < \sqrt{5}}$.

Úloha 4. Vyriešte systém rovníc:

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 3.9 \\ y + [z] + \{x\} = 3.5 \\ z + [x] + \{y\} = 2. \end{cases}$$

Riešenie. Prvým povšimnutím by bolo to, že každá premenná tu vyskytuje práve raz v každom tvare: $x, [x], \{x\}$. Skúsme to sčítať:

$$\begin{aligned} &x + [x] + \{x\} \\ + &y + [y] + \{y\} \\ + &z + [z] + \{z\} \\ = &x + x \\ + &y + y \\ + &z + z \\ = &2x + 2y + 2z \\ = &3.9 + 3.5 + 2 = 9.4 \end{aligned}$$

Čiže $x + y + z = 4.7$. Potom ale môžeme odrátať od tohto súčtu každú rovnicu, aby v súčtoch vyskytovali len členy $[\cdot]$ a $\{\cdot\}$:

$$\begin{cases} (x + y + z) - (x + [y] + \{z\}) = 4.7 - 3.9 \\ (x + y + z) - (y + [z] + \{x\}) = 4.7 - 3.5 \\ (x + y + z) - (z + [x] + \{y\}) = 4.7 - 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \{y\} + [z] = 0.8 \\ \{z\} + [x] = 1.2 \\ \{x\} + [y] = 2.7 \end{cases}$$

Tu už vieme jednoznačne nájsť všetky čísla: $[\{y\} + [z]] = [\{y\}] + [z] = [z] = [0.8] = 0$, keďže $0 \leq \{y\} < 1$. Analogicky, $\{y\} = 0.8, \{z\} = 0.2, \{x\} = 0.7, [x] = 1, [y] = 2$.

Teraz už si stačí len všimnúť, že $x = [x] + \{x\}$.

Odpoveď: $\boxed{x = 1.7, y = 2.8, z = 0.2}$.

Úloha 5. Nech $X = (2 + \sqrt{3})^{2002}$. Dokážte, že

a) $[X]$ je nepárne číslo;

$$\text{b) } \{X\} > 0.\underbrace{9\dots 9}_{1001}.$$

Riešenie. Všimnime si prvú vec: podľa binomickej vety po roznásobení zátvoriek každý člen súčtu bude v tvare $2^i(\sqrt{3})^{2002-i}$ pre celé $0 \leq i \leq 2002$. Pre parné i teda dostaneme celé číslo, a pre nepárne: celé číslo krát odmocnina z 3.

Čiže vieme zapísať $X = (2 + \sqrt{3})^{2002} = A + \sqrt{3}B$, kde A, B sú nejaké celé čísla.

Čo by bol ďalší krok? Vieme si všimnúť, že čísla $2, \sqrt{3}$ sú celkom blízko seba. Konkrétne $2^2 = 4, \sqrt{3}^2 = 3, 4 - 3 = 1$. Môžeme povedať teda, že $4 - 3 = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$.

Teda, na jednej strane, podľa binomickej vety $(2 - \sqrt{3})^{2002} = A - \sqrt{3}B$, a na inej je to $\frac{1}{(2+\sqrt{3})^{2002}}$.

Potom

$$(2 + \sqrt{3})^{2002} + (2 - \sqrt{3})^{2002} = 2A.$$

Ďalej

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{3})^{2002} &= 2A - (2 - \sqrt{3})^{2002} \\ (2 + \sqrt{3})^{2002} &= (2A - 1) + (1 - (2 - \sqrt{3})^{2002}). \end{aligned}$$

Poznamenajme si, že $0 < (2 - \sqrt{3})^{2002} < 1$ (keďže zrejme $2 - \sqrt{3} < 1$). Potom aj

$$0 < (1 - (2 - \sqrt{3})^{2002}) < 1$$

Teda

$$\left[(2 + \sqrt{3})^{2002} \right] = (2A - 1),$$

čo je nepárne číslo.

$$\left\{ (2 + \sqrt{3})^{2002} \right\} = 1 - (2 - \sqrt{3})^{2002}.$$

$$(2 - \sqrt{3})^{2002} = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^{2002}} = \frac{1}{(7 + 4\sqrt{3})^{1001}} < \frac{1}{10^{1001}}.$$

Potom $\left\{ (2 + \sqrt{3})^{2002} \right\} > 1 - \frac{1}{10^{1001}}$, čo bolo treba dokázať.

Úloha 6. Pozrieme sa na postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots$$

(postupne vypíšeme jednu jednotku, potom dve dvojky, tri trojky, štyri štvorky atď.). Aké číslo sa nachádza na pozícii

a) 2025;

b) n ?

Riešenie. Nech $x_n = k$ je člen postupnosti s číslom n . Pred prvým výskytom čísla k boli vypísané $1 + 2 + 3 + \dots + k - 1 = \frac{k(k-1)}{2}$ čísiel. A posledné výskyt čísla k má index $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Teda

$$\frac{k(k-1)}{2} < n \leq \frac{k(k+1)}{2},$$

a potom

$$k^2 - k < 2n < k^2 + k.$$

Všimneme si, že keď pripočítame $\frac{1}{4}$, tak dostaneme:

$$k^2 - k + \frac{1}{4} < 2n < k^2 + k + \frac{1}{4}.$$

To znamená

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 < 2n < \left(k + \frac{1}{2}\right)^2$$
$$k - \frac{1}{2} < \sqrt{2n} < k + \frac{1}{2}.$$

Potom $x_n = k = \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$. Konkrétne $x_{2025} = \lfloor \sqrt{4050} \rfloor = 63$.

Cvičenie 9. Vyriešte rovnicu $\lfloor x \rfloor^2 = \lfloor x^2 \rfloor$

Cvičenie 10. Nájdite najmenšie kladné x , pre ktoré $\lfloor x \rfloor \cdot \{x\} \geq 3$.

Cvičenie 11. Dokážte, že pre všetky nezáporné reálne x platí $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

Cvičenie 12. Pre ktoré reálne $a > 1$ rovnosť $\lfloor \log_a \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor \log_a x \rfloor$ platí pre všetky reálne $x > 0$?

Celá časť a delenie so zvyškom

Vydelíme so zvyškom prirodzené číslo a prirodzeným číslom b , t.j. zapíšeme a ako

$$a = kb + r$$

kde k je celé nezáporné číslo, a zvyšok $0 \leq r < b$. Zapíšeme rovnosť ako:

$$\frac{a}{b} = k + \frac{r}{b}$$

Vidíme, že $0 \leq \frac{r}{b} < 1$. Z tohto ale vyplýva, že $k = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$, $r = \left\{ \frac{a}{b} \right\}$. Teda:

$$a = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor b + b \left\{ \frac{a}{b} \right\}$$

Sme zvládli vyjadriť zvyšok pomocou celej a desatinnej časti zlomku.

Teraz zistíme, koľko existuje kladných celých čísel, ktoré sú menšie ako dané číslo x (nie nevyhnutne celé číslo) a deliteľné daným kladným celým číslom n .

Je jasné, že také čísla neexistujú, keď $n > x$. Potom keď $kn \leq x < (k+1)n$ pre celé k , tak to sú čísla $n, 2n, \dots, kn$. Čiže existuje presne k takých čísel. A keďže

$$k \leq \frac{x}{n} < k+1,$$

tak $k = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$.

Toto jednoduché pozorovanie pomôže nám dostať jednu dôležitú vetu v teórii čísel. Ale najprv vyriešime takúto úlohu.

Úloha 7. Akou najväčšou mocninou dvojky je deliteľné číslo 100!?

Riešenie. Podľa ukázaného vyššie, spomedzi čísel $1, 2, \dots, 100$ máme

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor &= 50 \text{ párnych čísel,} \\ \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor &= 25 \text{ čísel deliteľných 4,} \\ \left\lfloor \frac{100}{8} \right\rfloor &= 12 \text{ čísel deliteľných 8,} \\ \left\lfloor \frac{100}{16} \right\rfloor &= 6 \text{ čísel deliteľných 16,} \\ \left\lfloor \frac{100}{32} \right\rfloor &= 3 \text{ čísel deliteľných 32,} \\ \left\lfloor \frac{100}{64} \right\rfloor &= 1 \text{ číslo deliteľné 64.}\end{aligned}$$

Z tohto vyplýva, že dokopy v súčine $100!$ vyskytuje $50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$ dvojok, t.j. $100!$ je deliteľné číslom 2^{97} , a nie je deliteľné číslom 2^{98} .

Odpoveď: $\boxed{97}$.

Cvičenia

Cvičenie 13. a) Pre ktoré prirodzené n číslo $n!$ je deliteľné číslom 2^n ?

b) Existuje číslo k také, že $n!$ je deliteľné číslom 2^{n-k} pre všetky n ?

c) Nech $p > 2$ je prvočíslo. Existuje také číslo k , že $n!$ je deliteľné číslom p^{n-k} pre všetky n ?

Cvičenie 14. Akou mocninou dvojky je deliteľné číslo $(n+1)(n+2)\dots(2n)$?

Cvičenie 15. Dokážte, že $(n!)!$ je deliteľné číslom $(n!)^{(n-1)!}$

Cvičenie 16. Akou mocninou prvočísla p je deliteľné číslo

a) $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)$;

b) $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)$?

Počítanie počtu celočíselných bodov

Začneme jednoduchšou otázkou. Nech α a β sú reálne čísla, a $\alpha < \beta$. Koľko celých čísel existuje v intervale $(\alpha; \beta)$?

Nech m je celé číslo v intervale $(\alpha; \beta)$. Rozmyslime si najprv podmienku $\alpha < m$. Na jednej strane určite platí $[\alpha] < m$. Na inej strane určite platí $\alpha < [\alpha] + 1$, a teda $m = [\alpha] + 1$ bude riešením. Teda $[\alpha] + 1 \leq m$ je tesné dolné ohraničenie.

Teraz skúsme si postup upraviť pre podmienku $m < \beta$. Na jednej strane, určite platí $m < [\beta] + 1$. Či vždy $[\beta] < \beta$? No očividne nie, lebo keď $\beta \in \mathbb{Z}$, tak $[\beta] = \beta$. Ale ak $\beta \notin \mathbb{Z}$, tak $[\beta] < \beta$. Čiže $m = [\beta]$ bude riešením práve vtedy keď $\beta \notin \mathbb{Z}$. Každopádne ale $[\beta] - 1 < \beta$, a teda určite platí $m \leq [\beta] - 1$.

Číže pre $\beta \in \mathbb{Z}$ tesné ohraničenia budú:

$$[\alpha] + 1 \leq m \leq [\beta] - 1,$$

a pre $\beta \notin \mathbb{Z}$:

$$[\alpha] + 1 \leq m \leq [\beta].$$

Počet riešení vieme ľahko dopočítat: v prvom prípade je to $[\beta] - [\alpha] - 1$, v druhom je to $[\beta] - [\alpha]$.

Poznámka: pozorný čitateľ by mohol navrhnúť zaujímavejší postup a namiesto $[\cdot]$ pre β použiť $\lceil \cdot \rceil$ ³. Vtedy v skutočnosti postup bude aj ľahší: vždy platí $m < \lceil \beta \rceil$ a vždy platí $\lceil \beta \rceil - 1 < \beta$. V tomto prípade by sme dostali jediné tesné ohraničenia $[\alpha] + 1 \leq m \leq \lceil \beta \rceil - 1$, a dostali by sme teda aj jediný vzorček: $\lceil \beta \rceil - [\alpha] - 1$. Premyslite si, prečo obidva výsledky sú rovnaké.

Analogická otázka: *koľko existuje čísel, čo sú násobky nejakého daného čísla $x > 0$ (t.j. čísel tvaru nx , kde $n \in \mathbb{Z}$), v intervale $(\alpha; \beta)$?* Odpoveď je zrejmá: stačí zrátať celé čísla n na intervale $(\frac{\alpha}{x}; \frac{\beta}{x})$, a teda takých čísel je presne $\lceil \frac{\beta}{x} \rceil - \lfloor \frac{\alpha}{x} \rfloor - 1$.

Teraz vyriešime úlohu.

Úloha 8. Dokážte, že keď n je kladné celé číslo, a $x > 0$, tak

$$\left\lfloor \frac{[x]}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor.$$

Riešenie. Analogicky, ako v uvažovaní hore, vieme ukázať, že počet celých čísel, deliteľných číslom $n \in \mathbb{N}$ na intervale $(0; x]$ pre reálne x je $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$.

Na inej strane, tento počet očividne je rovnaký na intervale $(0; [x]]$, čo ale podľa vzorca je $\left\lfloor \frac{[x]}{n} \right\rfloor$.

Myšlienku počítania čísel vieme rozšíriť na počítanie bodov. Pomocou tejto idey vieme nasledujúcu úlohu, ktorá je dôležitá v teórii čísel⁴.

Úloha 9. Nech p a q sú nesúdeliteľné kladné celé čísla. Dokážte, že

$$\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Riešenie. Pozrieme sa na roviny xOy na body $(x; y)$ s celými súradnicami, pričom $1 \leq x \leq q-1, 1 \leq y \leq p-1$, t.j. pozrieme sa na body, čo sú vnútri obdĺžnika $OABC$.

Všimneme si, že na diagonale OB okrem samotných bodov O a B nie sú body s celočíselnými súradnicami. Naozaj, priamka OB má rovnicu $y = \frac{p}{q}x$. Keď celý bod $(m; n)$ leží na OB , pričom $0 < m < q$ a $0 < n < p$, tak $n = \frac{p}{q}m$, teda $qn = mp$. Ale q a p sú nesúdeliteľné. Teda q delí m , čo je spor s tým, že $0 < m < q$.

Tým pádom trojuholník $\triangle OBC$ má práve polovicu tých celočíselných bodov, čo je $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$.

Teraz poďme zrátať tie body iným spôsobom. Konkrétne, rozdelíme trojuholník na „pásiky“. Pre $x = k$ (k je celé), nech $K = (k; 0)$, $L = (k, \frac{p}{q}k)$. Vo vnútri úsečky KL podľa úvah vyššie existuje $\left\lfloor \frac{p}{q}k \right\rfloor$ celých bodov, keďže stačí zrátať celé čísla na intervale $(0; \frac{p}{q}k)$.

Takým spôsobom zistíme, že počet bodov je $\left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{q} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(q-1)p}{q} \right\rfloor$.

³motivácia za týmto krokom je intuitívna: m je teraz vľavo od znaku $<$, čiže aj operáciu zaokrúhľovania chceme robiť nie nadol, ale nahor

⁴konkrétne sa používa pri dôkaze *kvadratickej reciprocity*

Zráтали sme rovnaký počet bodov dvoma spôsobmi, čiže platí rovnosť, ktorú sme chceli dokázať.

Pozrieme sa ďalší príklad. Pomocou $\tau(n)$ budeme značiť počet deliteľov kladného celého čísla n .

Úloha 10. Dokážte, že

$$\tau(1) + \tau(2) + \cdots + \tau(n) = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor.$$

Riešenie. Namiesto toho, aby rátať, koľko každé číslo od 1 po n má deliteľov, zrátame, koľko krát každé číslo od 1 po n je deliteľom (v skutočnosti, čísla od 1 po n nemôžu mať väčšie delitele alebo menšie delitele). Číslo k delí presne $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ čísel od 1 až po n .

Cvičenie 17. Nech $\sigma(n)$ je súčet všetkých deliteľov kladného celého čísla n . Potom

$$\sigma(1) + \sigma(2) + \cdots + \sigma(n) = \left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \cdots + n \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor$$

Cvičenie 18. Dokážte, že pre reálne x a kladné celé n platí:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n} \right] + \left[x + \frac{2}{n} \right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx].$$

Referencie

- [1] A Egorov. *Celá a desatinná časť čísla*. <https://kvant.mccme.ru/pdf/2002/05/kv0502egorov.pdf>. [Accessed 09-07-2026]. 2002.