

# P-valuácie

Jakub Krivošík

## Abstrakt

$p$ -valuácie sú nástroj, pomocou ktorého môžeme skúmať problém lokálne pre každé prvočíslo  $p$ , ukazuje sa, že keď poznáme túto lokálnu analýzu pre každé prvočíslo  $p$ , tak môžeme spätne vydedukovať nejaké globálne vlastnosti. V tejto prednáške sa pozrieme ako pracovať s  $p$ -valuáciami a taktiež aj na nejaké pokročilé vety o nich.

**Definícia 1.** Pre prvočíslo  $p$  a celé číslo  $n$  označíme  $p$ -valuáciu čísla  $n$  ako  $\nu_p(n) = k$ , pričom  $p^k \mid n$ , ale  $p^{k+1} \nmid n$ .

Môžeme si z definície všimnúť, že  $n = 0$ , práve vtedy keď pre všetky  $p$  je  $\nu_p(n) = \infty$ .

**Tvrdenie 1.** *Nech  $p$  je prvočíslo a  $a, b \in \mathbb{Z}$ , potom:*

- $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$ .
- $\nu_p\left(\frac{a}{b}\right) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$ .
- $\nu_p(a \pm b) \geq \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$ , pričom rovnosť nastáva ak  $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$ .

**Cvičenie 1.** Nájdite také prirodzené  $a, b$ , že platí  $\nu_p(a + b) > \max(\nu_p(a), \nu_p(b))$ .

**Tvrdenie 2.** *Nech  $a, b \in \mathbb{Z}$ , potom:*

- $a = b$  práve vtedy keď  $\nu_p(a) = \nu_p(b)$  pre všetky prvočísla  $p$ .
- $a \mid b$  práve vtedy keď  $\nu_p(a) \leq \nu_p(b)$  pre všetky prvočísla  $p$ .
- $a$  je  $b$ -ta mocnina práve vtedy keď  $b \mid \nu_p(a)$  pre všetky prvočísla  $p$ .

**Cvičenie 2.** Rozmyslite si, či sú  $a, b$  jednoznačne určené, ak poznáme  $\gcd(a, b)$  a  $\text{nsn}(a, b)$ .

**Cvičenie 3.** Rozmyslite si, že  $p$ -valuácie sa dajú prirodzene rozšíriť na funkciu  $\nu_p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ , pričom si zachovávajú všetky vyššie spomenuté vlastnosti.

**Cvičenie 4.** Koľko nulami sa končí 2026!?

**Cvičenie 5.** Dokážte, že ak  $a^b \mid b^c$  a  $a^c \mid c^b$ , potom  $a^2 \mid bc$ .

**Cvičenie 6.** Dokážte, že platí  $\binom{m+n}{m}$  delí  $\binom{2m}{m}\binom{2n}{n}$ .

**Veta 3** (Legendre's formula). *Nech  $n \in \mathbb{N}$ , potom*

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \frac{n - s_p(n)}{p - 1},$$

pričom  $s_p(n)$  je ciferný súčet čísla  $n$  v sústave so základom  $p$ .

**Veta 4** (Kummer's theorem). *Pre každé prvočíslo  $p$  je  $\nu_p\left(\binom{m}{n}\right)$  rovné počtu prechodov pri sčítaní  $n$  a  $m - n$  v sústave so základom  $p$ .*

**Veta 5** (Lifting the exponent lemma). *Nech  $a, b, n \in \mathbb{N}$  a nech  $p$  je prvočíslo, také, že  $p \mid a - b$ , ale  $p \nmid a, b$ , potom:*

- Ak  $p > 2$ , potom

$$\nu_p(a^n - b^n) = \nu_p(a - b) + \nu_p(n).$$

- Ak  $p = 2$  a  $n$  je párne, potom

$$\nu_2(a^n - b^n) = \nu_2(a^2 - b^2) + \nu_2\left(\frac{n}{2}\right).$$

- Ak  $p = 2$  a  $n$  je nepárne, potom

$$\nu_2(a^n - b^n) = \nu_2(a - b).$$

Rozmyslite si, že pre nepárne  $n$  a  $a, b, p$  s predpokladmi ako vyššie máme  $\nu_p(a^n + b^n) = \nu_p(a + b) + \nu_p(n)$ .

**Cvičenie 7.** Nájdite najmenšie  $n \geq 1$  také, že  $149^n - 2^n$  je deliteľné  $3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7$ .

**Cvičenie 8.** Nájdite všetky trojice  $(a, b, p)$ , kde  $p$  je prvočíslo a platí:

$$a^p + b^p = p!$$

**Úloha 1** (CKMO 2024/1). Nech  $a, b, c$  sú prirodzené čísla také, že jedna z hodnôt

$$\gcd(a, b)\text{lcm}(b, c), \quad \gcd(b, c)\text{lcm}(c, a), \quad \gcd(c, a)\text{lcm}(a, b)$$

sa rovná súčinu zvyšných dvoch. Dokážte, že niektoré z čísel  $a, b, c$  je násobkom iného z nich. **Hinty:** 1

**Úloha 2** (Poland 1983/4). Majme prirodzené čísla  $a, b, c, d$  také, že  $ab = cd$ . Dokážte, že

$$\gcd(a, c) \cdot \gcd(a, d) = a \gcd(a, b, c, d)$$

**Hinty:** 2

**Úloha 3** (BAMO 2018/4). Pre prirodzené čísla  $a, b, c$  platí, že  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$  je prirodzené číslo. Dokážte, že aj  $\sqrt[3]{abc}$  je tiež prirodzené číslo. **Hinty:** 3

**Úloha 4.** Majme prirodzené čísla  $a, b$  také, že platí  $a \mid b^2$ ,  $b^2 \mid a^3$ ,  $a^3 \mid b^4$ , ... Dokážte, že platí  $a = b$ . **Hinty:** 4

**Úloha 5** (IMO 2026/1). Na tabuli je napísaných 2026 celých čísel väčších ako 1. V každom kole Confucius zoberie dve čísla  $m > 1$  a  $n > 1$  ktoré sú napísané na tabuli, vymaže ich a napíše na tabuľu čísla:

$$\gcd(m, n) \quad \text{a} \quad \frac{\text{lcm}(m, n)}{\gcd(m, n)}$$

Takto pokračuje, kým môže. Dokážte, že v konečnom počte krokov na tabuli ostane jedno prirodzené číslo  $M$ , ktoré je väčšie ako 1 a zvyšné čísla budú rovné 1. Dokážte, že táto hodnota  $M$  nezáleží na poradí ťahov, ktoré Confucius robí. **Hinty:** 5

**Úloha 6.** Majme rôzne reálne čísla  $a, b$  také, že

$$a - b, a^2 - b^2, a^3 - b^3, \dots$$

sú všetko celé čísla. Dokážte, že  $a, b$  sú celé čísla. **Hinty:** 6

**Úloha 7** (ISL 2007 N2). Nech  $b, n > 1$  sú prirodzené čísla. Predpokladajme, že pre každé  $k \in \mathbb{N}$  existuje  $a_k \in \mathbb{N}$  také, že  $b - a_k^n$  je deliteľné číslom  $k$ . Dokážte, že  $b = A^n$  pre nejaké prirodzené číslo  $A$ . **Hinty:** 7

**Úloha 8** (APMO 2017/4). Racionálne číslo nazveme *mocné*, ak sa dá zapísať v tvare  $\frac{p^k}{q}$  pre nesúdeliteľné  $p, q$ . Nech  $a, b, c$  sú kladné racionálne čísla také, že  $abc = 1$ . Predpokladajme, že existujú kladné celé čísla  $x, y, z$  také, že  $a^x + b^y + c^z$  je celé číslo. Dokážte, že  $a, b, c$  sú mocné čísla. **Hinty:** 8

**Úloha 9** (USEMO 2020/1). Ktoré prirodzené čísla môžu byť pre nejaké  $a, b, c \in \mathbb{N}$  zapísané ako

$$\frac{\text{lcm}(a, b) + \text{lcm}(b, c)}{\text{lcm}(a, c)}?$$

**Hinty:** 9

**Úloha 10** (ISL 2023 N3). Pre prirodzené čísla  $n$  a  $k \geq 2$  si definujeme  $E_k(n)$  ako najväčší exponent  $r$ , pre ktorý platí  $k^r \mid n!$ . Dokážte, že existuje nekonečne veľa  $n$  takých, že  $E_{10}(n) > E_9(n)$  a že existuje nekonečne veľa  $n$  takých, že  $E_{10}(n) < E_9(n)$ . **Hinty:** 10

**Úloha 11** (Glaisher's theorem). Dokážte, že počet nepárnych čísel v ľubovoľnom riadku Pascalovho trojuholníka je mocnina 2. **Hinty:** 11

**Úloha 12.** Nech  $k > 1$ , dokážte, že existuje nekonečne veľa  $n$  takých, že

$$n \mid 1^n + 2^n + \dots + k^n.$$

**Hinty:** 12

**Úloha 13** (IMO 2019/4). Nájdí všetky  $n, k \in \mathbb{N}$  také, že

$$k! = \prod_{i=0}^{n-1} (2^n - 2^i) = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4) \dots (2^n - 2^{n-1}).$$

**Hinty:** 13

**Úloha 14** (BxMO 2024/4). Pre každé kladné celé číslo  $n$  označíme  $\text{rad}(n)$  súčin všetkých rôznych prvočísel deliacich  $n$ . Dokážte, že existuje nekonečne veľa  $a, b > 1$  takých, že  $\text{gcd}(a, b) = 1$  a

$$\text{rad}(ab(a+b)) < \frac{a+b}{2024^{2024}}$$

**Hinty:** 14

**Úloha 15** (Iran 2008/1). Nájdí všetky  $a \in \mathbb{N}$  také, že pre všetky  $n \in \mathbb{N}$  je  $4(a^n + 1)$  tretia mocnina. **Hinty:** 15

**Úloha 16** (Putnam 2017 B3). Nech

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i,$$

kde  $a_i \in \{0, 1\}$ . Dokážte, že ak  $f(\frac{2}{3}) = \frac{3}{2}$ , tak  $f(\frac{1}{2})$  je iracionálne. **Hinty:** 16

**Úloha 17.** Predpokladajme, že pre prirodzené  $n \geq 2$  je  $3^n - 2^n$  mocnina prvočísla. Dokážte, že  $n$  je prvočíсло. **Hinty:** 17

**Úloha 18** (USAJMO 2024/3). Majme postupnosť  $a_1, a_2, \dots$  takú, že  $a_1 = 2$  a

$$a_{n+1} = a_n^{n+1} - 1$$

pre  $n \geq 1$ . Dokážte, že pre každé nepárne prvočíslo  $p$  a kladné celé číslo  $k$  existuje  $n$  také, že  $p^k \mid a_n$ . **Hinty:** 18

**Úloha 19** (KMS 45/3/9). Majme kladné celé číslo  $n$ . Povieme, že  $n$  je *blízko*, ak jeho zápis v dvojkovej sústave sa končí na jeho zápis v desiatkovej sústave. Nájdite všetky čísla  $n$ , ktoré sú blízko a v desiatkovej sústave majú najviac dve cifry 1. **Hinty:** 19

**Úloha 20** (IMO 2022/5). Nájdite všetky trojice  $(a, b, p)$  prirodzených čísel, kde  $p$  je prvočíslo a platí

$$a^p = b! + p.$$

**Hinty:** 20

**Úloha 21.** Predpokladajme, že existuje kladné celé  $C$  a postupnosť kladných celých čísel  $a_0, a_1, a_2, \dots$  takých, že

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n^3 - Ca_n}$$

pre všetky  $n \in \mathbb{N}$ . Dokážte, že od nejakého momentu je postupnosť konštantná. **Hinty:** 21

**Úloha 22** (IMO 2018/5). Nech  $a_1, a_2, \dots$  je postupnosť prirodzených čísel a nech  $N$  je nejaké dané prirodzené číslo. Predpokladajte, že pre všetky  $n \geq N$  je

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1}$$

prirodzené číslo. Dokážte, že existuje  $M \in \mathbb{N}$  také, že  $a_m = a_{m+1}$  pre všetky  $m \geq M$ . **Hinty:** 22

**Úloha 23** (ISL 2021 N5). Dokážte, že existuje konečne veľa štvoríc prirodzených čísel  $(n, a, b, c)$  takých, že

$$n! = a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}.$$

**Hinty:** 23

**Úloha 24** (ELMO SL 2023 N2). Nájdite najväčšie kladné celé číslo  $n$  také, že existuje postupnosť prirodzených čísel  $a_1, \dots, a_n$ , že

$$a_1^{a_2} = a_2^{a_3} = \dots = a_{n-1}^{a_n}.$$

**Hinty:** 24

**Úloha 25** (ELMO SL 2019 N4). Majme dané kladné celé  $b$  a nezáporné celé čísla  $a_0, a_1, \dots$  také, že  $a_i < b$ . Je dané, že  $a_0 \neq 0$  a postupnosť  $\{a_i\}$  je od nejakého momentu periodická s nekonečne veľa nenulovými členmi. Nech  $S$  je množina čísel  $n$ , takých že  $n \mid (a_0 a_1 \dots a_n)_b$ . Predpokladajme, že  $S$  je nekonečná, dokážte že existuje nekonečne veľa prvočísel deliacich aspoň jeden člen z  $S$ . **Hinty:** 25

**Úloha 26** (China TST 2016/2/4). Pre kladné celé číslo  $m = 2^k \cdot t$ , kde  $k \geq 0$  a  $t$  je nepárne si definujeme  $f(m) = t^{1-k}$ . Dokáž, že pre každé prirodzené číslo  $n$  a ľubovoľné nepárne prirodzené číslo  $a \leq n$  platí, že  $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \dots \cdot f(n)$  je násobok  $a$ . **Hinty:** 26

**Úloha 27** (ISL 2024 N3). Nájdite všetky nekonečné postupnosti prirodzených čísel  $a_1, a_2, \dots$  takých, že pre každé celé čísla  $m \leq n$  aritmetický a geometrický priemer:

$$\frac{a_m + a_{m+1} + \dots + a_n}{n - m + 1} \quad \text{a} \quad (a_m a_{m+1} \dots a_n)^{\frac{1}{n-m+1}}$$

sú celé čísla. **Hinty:** 27

**Úloha 28** (USA TST 2024/5). Predpokladajme, že  $a_1 < a_2 < \dots < a_{2024}$  je aritmetická postupnosť kladných celých čísel a  $b_1 < b_2 < \dots < b_{2024}$  je geometrická postupnosť kladných celých čísel. Koľko najviac spoločných členov môžu mať tieto dve postupnosti?

**Hinty:** 28

**Úloha 29** (RMM 2025/2). Uvažujme nekonečnú postupnosť  $a_1, a_2, \dots$  prirodzených čísel takú, že  $a_1 > 1$  a  $(2^{a_n} - 1)a_{n+1}$  je štvorec pre všetky prirodzené  $n$ . Je možné, aby sa niektoré dva členy postupnosti rovnali? **Hinty:** 29

**Úloha 30** (ISL 2019 N5). Nech  $a$  je kladné celé číslo. Kladné celé číslo  $b$  nazveme  $a$ -dobré ak  $\binom{an}{b} - 1$  je deliteľné  $an + 1$  pre každé kladné celé číslo  $n$ , pre ktoré  $an \geq b$ . Predpokladajme, že  $b$  je kladné celé číslo také, že  $b$  je  $a$ -dobré, ale  $b + 2$  nie je  $a$ -dobré. Dokáž, že  $b + 1$  je prvočíslo. **Hinty:** 30

**Úloha 31** (ISL 2014 N4). Nech  $n > 1$  je celé číslo. Dokáž, že existuje nekonečne veľa kladných celých čísel  $k$  takých, že člen  $a_k$  je nepárny, pričom

$$a_k = \left\lfloor \frac{n^k}{k} \right\rfloor.$$

**Hinty:** 31

**Úloha 32** (ISL 2020 N5). Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$  také, že:

- $f(n) \neq 0$  pre aspoň jedno  $n$ ,
- $f(xy) = f(x) + f(y)$  pre všetky kladné celé  $x, y$ ,
- existuje nekonečne veľa kladných celých  $n$  takých, že  $f(k) = f(n - k)$  pre všetky  $k < n$ .

**Hinty:** 32

**Úloha 33** (EGMO 2024/5). Nájdite všetky funkcie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  také, že pre všetky  $a, b$  platí

- $a$  a  $f(a)$  majú rovnaký počet kladných deliteľov,
- ak  $a \nmid b$  a  $b \nmid a$ , tak

$$\gcd(f(a), f(b)) > f(\gcd(a, b))$$

**Hinty:** 33

**Úloha 34** (IMO 2025/3). Funkcia  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  sa nazýva *senza* ak

$$f(a) \mid b^a + f(b)^{f(a)}$$

pre všetky kladné celé  $a, b$ . Nájdite najmenšie reálne  $c$  také, že  $f(n) \leq cn$  pre všetky *senza* funkcie a všetky kladné celé  $n$ . **Hinty:** 34

**Úloha 35.** Nájdite všetky dvojice  $(a, b)$  nesúdeliteľných prirodzených čísel takých, že  $a > b$  a existuje konečne veľa prirodzených čísel  $n$ , takých že  $n^2$  delí  $a^n - b^n$ . **Hinty:** 35

**Úloha 36** (Erdős-Pálffy-Szegedy). Nech  $a, b$  sú prirodzené čísla také, že pre každé prvočíslo  $p$  je zvyšok  $a$  po delení  $p$  nanajvýš rovný zvyšku  $b$  po delení  $p$ . Dokážte, že  $a = b$ . **Hinty:** 36

## Hinty

1. (a) Priama kalkulácia funguje.
2. (a) Proste to rozpíš a uvaž možnosti usporiadania.
3. (a) Priama kalkulácia funguje.
4. (a) Zoberme prvočíslo kde  $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$  a pozrime sa pre veľké  $k$  na  $a^k \mid b^{k+1}$  alebo  $b^k \mid a^{k+1}$ .
5. (a) ...
6. (a) Z prvých dvoch čísel dokáž, že  $a, b$  sú racionálne. Potom sa pozri na  $p$ -valuácie menovateľov.
7. (a) Sporom, vynúť si aby  $\nu_p(b - a_k^n)$  malo ohraničenú  $p$ -valuáciu.
8. (a) Priama kalkulácia funguje.
9. (a) Ukáž, že 2-valuácia zlomku nemôže byť nulová, pre zvyšné čísla nájdi konštrukciu.
10. (a) Použi Legendreho vo forme ciferného súčtu.
11. (a) Typický Kummer.
12. (a) Vhodne popáruj členy, LTE sa môže zísť.
13. (a) Pozri sa na 2 a 3 valuácie a boundni  $k$ .
14. (a) Aby  $\text{rad}(a)$  a  $\text{rad}(b)$  boli malé si zaručíme ľahko. Na "zmenšenie"  $\text{rad}(a + b)$  chceme aby bolo to bolo deliteľné veľa krát nejakým prvočísлом, čo tak použiť LTE?
15. (a) Použi LTE.
16. (a) Sporom, čo ak je  $f(\frac{1}{2})$  racionálne, ako bude potom vyzerat postupnosť  $\{a_i\}$ ?
17. (a) Sporom  $n = ab$ ,  $a, b > 1$ , spomeň si na LTE.
18. (a) Nájdi nekonečne veľa členov deliteľných  $p$ , rozprípaduj podľa parity indexu. Jeden stačí rozklad na súčin, v druhom si treba vytvoriť vhodný index a použiť LTE.
19. (a) Rozmysli si, v akom tvare musí byť  $n$ , použi LTE.
20. (a) Najprv skús ohraničiť  $b$ , potom zisti  $a$ , na záver sa pozri na 2-valuácie.
21. (a) Priama kalkulácia funguje, treba však rozobrať prípady.
22. (a) Odčítaj po sebe idúce členy, chceme aby postupnosť  $\nu_p(a_i)$  bola konštantná od nejakého momentu (toto však samo o sebe nestačí, uvažme  $\{a_i\}$  je  $i$ -te prvočíslo).
23. (a) Najprv ukáž, že  $n$  je párne. Potom rozdeľ na prípady podľa toho, či sú všetko  $a + b, b + c, c + a$  mocniny 2 alebo nie. Môže sa zísť aj Legendre, aj LTE.
24. (a) Odpoveď je 5.
25. (a) No hint?
26. (a) Treba to len priamo vypočítať, môže sa zísť Legendre.
27. (a) Druhá podmienka hovorí, že  $\nu_p(a_i)$  spĺňa prvú podmienku. Dokáž, že existuje nekonečne veľa rovnakých členov v  $\{\nu_p(a_i)\}$ .

- 28. (a) Kvocient geometrickej postupnosti je racionálny. Pre nejaké  $p$  má geometrická postupnosť rastúce  $p$ -valuácie, avšak v aritmetickej postupnosti nemôžu tak rýchlo rásť.
- 29. (a) Ukáž, že existuje  $p \mid 2^n - 1$ , že  $p > n$  a  $\nu_p(2^n - 1)$  je nepárne.
- 30. (a) Ukáž, že  $b$  je  $a$ -dobré  $\iff b$  je párne a zároveň všetky  $p \leq b$  delia  $a$ .
- 31. (a) Nepárne  $n$  sú ľahké, pre párne  $n$  zober prvočíslo deliace  $n - 1$  a použi LTE.
- 32. (a) No hint?
- 33. (a) Pozri hint 30 na strane 62.
- 34. (a) Ak pre nejaké  $n$  máme  $f(n) \neq n$ , ukáž, že  $f(p) = 1$  pre všetky dostatočne veľké prvočísla. Rozšír toto na všetky nepárne čísla. Mocniny 2 sa mapujú na mocniny 2, na finálny bound použi LTE.
- 35. (a) Musí platiť  $a - b = 1$ .
- 36. (a) No hint?