

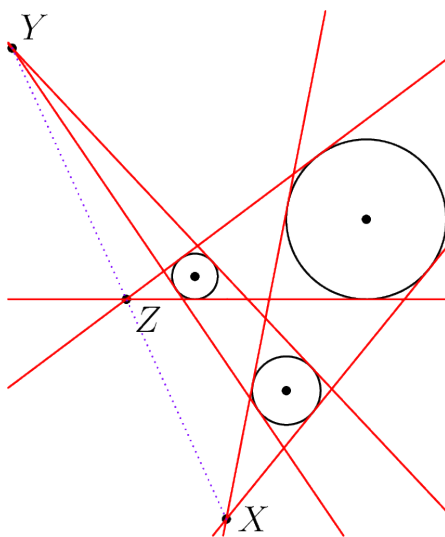
Mongeova veta

Michal Ilkovič

Definícia 1. (Orientovaná dĺžka úsečky) Na danej priamke zvolíme smer. Pre ľubovoľné dva body A, B na tejto priamke označuje AB orientovanú dĺžku úsečky. Platí $AB = -BA$. Ak body A, B, C ležia na jednej priamke, pomer CA/CB je kladný, ak bod C leží zvonku úsečky AB (vektory $\vec{CA}$ a $\vec{CB}$ majú rovnaký smer), a záporný, ak C leží vnútri úsečky AB .

1 Teória

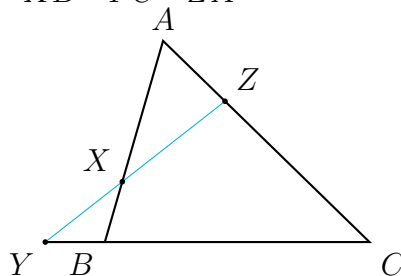
Veta 1 (Mongeova veta o troch kružniciach). *Majme tri kružnice v rovine, z ktorých žiadne dve nie sú koncentrické a žiadna neleží vnútri druhej. Pre každú dvojicu kružníc uvažujme priesečník ich dvoch spoločných vonkajších dotýčníc (body X, Y, Z v obrázku). Potom tieto tri priesečníky ležia na jednej priamke (sú kolineárne).*



Pre korektnosť dôkazu najprv uvedieme znenie Menelaovej vety.

Veta 2. (Menelaova veta) *Nech A, B, C sú vrcholy trojuholníka a body X, Y, Z ležia postupne na priamkach AB, BC, CA (rôzne od vrcholov). Body X, Y, Z sú kolineárne práve vtedy, keď pre ich orientované pomery platí:*

$$\frac{XA}{XB} \cdot \frac{YB}{YC} \cdot \frac{ZC}{ZA} = 1 \quad (1)$$



Dôkaz. Nech O_1, O_2, O_3 sú stredy a r_1, r_2, r_3 sú polomery troch kružníc $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Označme X, Y, Z postupne priesečníky spoločných vonkajších dotýčníc pre dvojice kružníc (ω_1, ω_2) , (ω_2, ω_3) a (ω_3, ω_1) .

Bod X je vonkajším stredom podobnosti kružníc ω_1 a ω_2 , takže leží na priamke O_1O_2 zvonku úsečky O_1O_2 . Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov tvorených stredmi, bodom X a bodmi dotyku polomerov vyplýva, že pomer vzdialeností bodu X od stredov je priamo úmerný ich polomerom. Keďže X leží zvonku úsečky, orientovaný pomer je kladný:

$$\frac{XO_1}{XO_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad (2)$$

Analogicky, body Y a Z sú vonkajšími stredmi podobnosti pre zostávajúce dvojice kružníc, ležia zvonku príslušných strán trojuholníka $\triangle O_1O_2O_3$ a ich orientované pomery sú:

$$\frac{YO_2}{YO_3} = \frac{r_2}{r_3}, \quad \text{a} \quad \frac{ZO_3}{ZO_1} = \frac{r_3}{r_1} \quad (3)$$

Vynásobením týchto troch rovností dostávame súčin orientovaných pomerov na stranách trojuholníka $\triangle O_1O_2O_3$:

$$\frac{XO_1}{XO_2} \cdot \frac{YO_2}{YO_3} \cdot \frac{ZO_3}{ZO_1} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_1} = 1 \quad (4)$$

Podľa Menelaovej vety pre trojuholník $\triangle O_1O_2O_3$ tento výsledok priamo znamená, že body X, Y a Z sú kolineárne. $\square$

Veta 3. (Mongeova-D'Alembertova veta)

Uvažujme tri kružnice. Stredy podobností každej dvojice kružníc (či už vnútorné alebo vonkajšie) ležia na jednej priamke vtedy a len vtedy, ak buď:

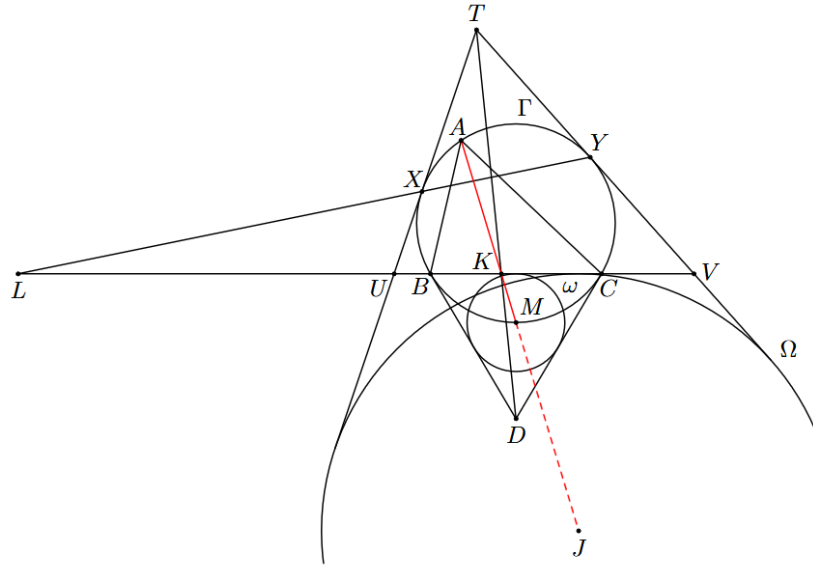
1. *všetky tri stredy sú vonkajšie (čo je pôvodná Mongeova veta),*
2. *alebo dva stredy sú vnútorné a jeden je vonkajší.*

Tento fakt priamo vyplýva z dôkazu pomocou Menelaovej vety, pretože vnútorný stred podobnosti rozdeľuje úsečku stredov v zápornom pomere (leží vnútri úsečky), zatiaľ čo vonkajší v kladnom pomere. Súčin troch pomerov dáva $+1$ iba vtedy, ak sú buď všetky tri pomery kladné ($+\cdot+\cdot+=+1$), alebo sú dva záporné a jeden kladný ($-\cdot-\cdot+=+1$).

2 Úlohy

Úloha 1. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník, v ktorom $AB < AC$, a nech Γ je kružnica jemu opísaná. Body X a Y ležia na kružnici Γ tak, že priamky XY a BC sa pretínajú na osi vonkajšieho uhla $\angle BAC$. Predpokladajme, že dotýčnice ku kružnici Γ v bodoch X a Y sa pretínajú v bode T , ktorý leží na rovnakej strane priamky BC ako bod A , a že priamky TX a TY pretínajú priamku BC postupne v bodoch U a V . Nech J je stred kružnice prísunutej k trojuholníku TUV oproti vrcholu T . Dokážte, že priamka AJ je osou vnútorného uhla $\angle BAC$.

(ISL 2024)



Riešenie. Nech osi vnútorného a vonkajšieho uhla $\angle BAC$ pretínajú priamku BC postupne v bodoch K a L . Nech AK pretína kružnicu ABC opäť v bode M a nech D je priesečník dotýčníc ku kružnici Γ v bodoch B a C . Nech Ω je T -pripísaná kružnica trojuholníka TUV a ω je kružnica vpísaná trojuholníku DBC .

Tvrdenie 1: Body T , K a D sú kolineárne.

Dôkaz. Všimnime si, že BC a XY sú poláry bodov D a T vzhľadom na kružnicu Γ . Podľa La Hireovej vety je priamka TD polárou bodu L vzhľadom na Γ . Keďže štvorica bodov $(B, C; K, L) = -1$ tvorí harmonickú dvojicu, bod K tiež leží na poláre bodu L . Tým je dokázaná kolinearita bodov T, K, D . $\square$

Tvrdenie 2: Stredom kružnice vpísanej trojuholníku DBC je bod M .

Dôkaz. Platí, že $\angle MBC = \angle MAC = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle DBC$, takže BM je osou uhla $\angle DBC$. Podobne CM je osou uhla $\angle BCD$, z čoho vyplýva, že M je stredom kružnice vpísanej trojuholníku DBC . $\square$

Tvrdenie 3: Priesečníkom spoločných vonkajších dotýčníc kružníc Ω a ω je bod K .

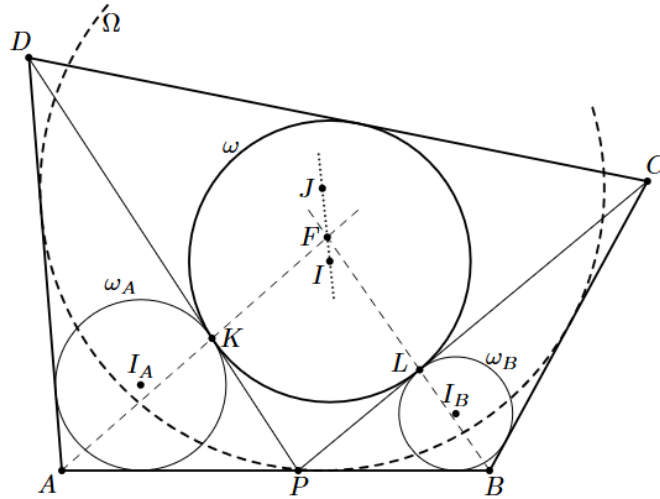
Dôkaz. Nech K_1 je priesečník spoločných vonkajších dotýčníc Ω a ω . Keďže Ω aj ω sa dotýkajú priamky BC a ležia na tej istej strane priamky BC (opačnej voči A), K_1 leží na priamke BC .

Keďže T je priesečník spoločných vonkajších dotýčníc kružníc Γ a Ω , a D je priesečník spoločných vonkajších dotýčníc kružníc Γ a ω , podľa Mongeovej vety musí bod K_1 ležať na priamke TD . Keďže K_1 leží súčasne na priamke BC aj na priamke TD , ide o ten istý bod ako bod K . $\square$

Z tretieho tvrdenia vyplýva, že bod K leží na jednej priamke so stredmi kružníc Ω a ω , ktorými sú postupne body J a M . Keďže body K a M oba ležia na osi uhla $\angle BAC$, musí na nej ležať aj stred J , čo dokazuje, že priamka AJ je osou uhla $\angle BAC$. $\square$

Úloha 2. Bod P leží na strane AB konvexného štvoruholníka $ABCD$. Nech ω je kružnica vpísaná trojuholníku CPD a I je jej stred. Predpokladajme, že ω sa dotýka kružníc vpísaných trojuholníkom APD a BPC postupne v bodoch K a L . Nech sa priamky AC and BD pretínajú v bode E a priamky AK and BL v bode F . Dokážte, že body E, I a F sú kolineárne.

(ISL 2007)

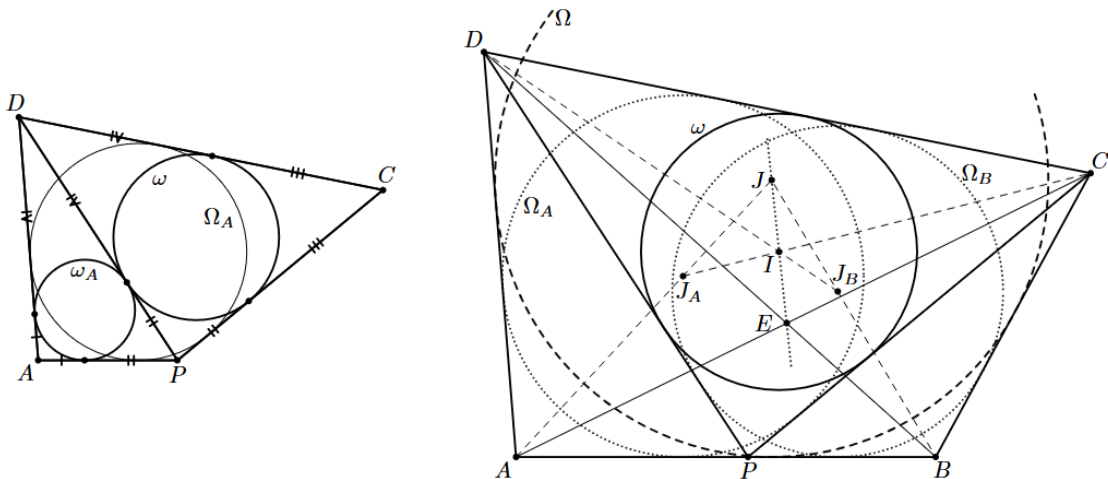


Riešenie. Nech Ω je kružnica dotýkajúca sa úsečky AB a polopriamok AD a BC ; nech J je jej stred. Dokážeme, že body E a F ležia na priamke IJ .

Označme kružnice vpísané trojuholníkom ADP a BCP ako ω_A a ω_B . Nech h_1 je homotetia (rovnoláhosť) so záporným koeficientom, ktorá zobrazuje ω na Ω . Túto homotetiu môžeme považovať za zloženie dvoch homotetií: jednej, ktorá zobrazuje ω na ω_A (so záporným koeficientom a stredom K), a druhej, ktorá zobrazuje ω_A na Ω (s kladným koeficientom a stredom A).

Je známe, že v takomto prípade tri stredy homotetie ležia na jednej priamke (tento fakt sa tiež nazýva veta o troch stredoch podobnosti). Preto stred homotetie h_1 leží na priamke AK . Analogicky, tento stred leží aj na priamke BL , takže týmto stredom je bod F . Z toho vyplýva, že F leží na priamke stredov kružníc ω a Ω , t.j. na priamke IJ (ak $I = J$, potom aj $F = I$ a tvrdenie je zrejmé).

Uvažujme štvoruholník $APCD$ a označme si rovnaké úseky dotýčníc ku kružniciam ω a ω_A . Keďže kružnice ω a ω_A majú spoločný bod dotyku s priamkou PD , ľahko vidno, že platí $AD + PC = AP + CD$. To znamená, že štvoruholníku $APCD$ sa dá vpísať kružnica. Analogicky sa dá vpísať kružnica aj štvoruholníku $BCDP$. Nech Ω_A a Ω_B sú ich príslušné vpísané kružnice.



Uvažujme teraz homotetiu h_2 s kladným koeficientom, ktorá zobrazuje ω na Ω . Predstavme si h_2 ako zloženie dvoch homotetií: prvej, ktorá zobrazuje ω na Ω_A (s kladným koeficientom a stredom C), a druhej, ktorá zobrazuje Ω_A na Ω (s kladným koeficientom a stredom A). Stred homotetie h_2 teda leží na priamke AC . Z analogických dôvodov leží aj na priamke BD , čiže týmto stredom je priesečník E . Tým pádom aj bod E leží na priamke stredov IJ , čím je tvrdenie dokázané. $\square$