

KAGH nerovnosti

Barbora Novosadová
barbora.novosadova@trojsten.sk

Veľkú časť tohto materiálu som prevzala zo seriálu od Pavel Šalom, Michal Rolínek, Matematický korespondenčný seminár Prase. Ak nie je uvedená iná citácia, zdrojom je tento materiál).

Definícia 1. Nech $x_1, x_2, \dots, x_n$ sú kladné reálne čísla, potom definujeme nasledovné:

$$\text{Aritmetický priemer} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (1)$$

$$\text{Geometrický priemer} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \quad (2)$$

$$\text{Harmonický priemer} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \quad (3)$$

$$\text{Kvadratický priemer} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \quad (4)$$

Z toho prvé tri nazývame Pytagorejskými priermi.

Tieto priemery spĺňajú známu nerovnosť:

Veta 1. Pre kladné čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}},$$

teda $K \geq A \geq G \geq H$, čo poznáme ako KAGH nerovnosť. Rovnosť nastáva práve keď $x_1 = \dots = x_n$

Poznámka: podmienka pre prípad rovnosti je vo všetkých 3 nerovnostiach nutná a postačujúca, teda buď nastávajú všetky naraz, alebo žiadna.

Úloha 1. Pre dve premenné a, b vieme všetky nerovnosti jednoducho dokázať pomocou výrazu $(a - b)^2 \geq 0$. Ukážte!

Dôkaz. Veta 1: AG nerovnosť, pomocou indukcie. [PS-serial] Pre $n = 1$ triviálne máme $x_1 \geq x_1$. Predpokladajme teda, že nerovnosť platí pre všetky n -tice, chceme ju dokázať aj pre $(n+1)$ -ticu $\frac{x_1 + \dots + x_{n+1}}{n+1} = L$. Zvoľme si číslo x'_n tak, aby $\frac{x_1 + \dots + x'_n}{n} = L$, teda $x'_n = x_n + x_{n+1} - L$. Aby sme mohli využiť AG pre n -ticu $x_1, \dots, x_{n-1}, x'_n$, musíme overiť, že $x'_n \geq 0$. Vďaka symetrickosti AG môžeme predpokladať, že x_{n+1} je najväčšie zo všetkých a x_n je, naopak, najmenšie - ak by neboli, stačí čísla preusporiadať. Potom je ale $x'_n = \text{"najväčšie"} + \text{"najmenšie"} - \text{priemer}$, čo je určite nezáporné. Platí teda

$$L^n \geq x_1 \dots x_{n-1} x'_n \Leftrightarrow L^{n+1} \geq x_1 \dots x_{n-1} x'_n L,$$

(AG nerovnosť umocnená na n). Ďalej si všimnime, že $x'_n L = (x_n + x_{n+1} - L) \cdot L \geq x_n x_{n+1}$, keďže vďaka nášmu predpokladu o x_n a x_{n+1} platí $(x_{n+1} - L)(L - x_n) \geq 0$. Vďaka poslednému tiež vidíme, že rovnosť nastáva práve keď $x_1 = \dots = x_{n+1}$.

AG nerovnosti, pomocou Jensenovej nerovnosti. Mierne elegantnejší dôkaz využíva tzv. Jensenovu nerovnosť: Keďže logaritmus je konkávna funkcia, platí

$$\log \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right) \geq \frac{\sum_{i=1}^n \log x_i}{n} = \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{n} = \log \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}$$

S využitím faktu, že exponenciála je rastúca funkcia, dostávame

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \geq \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}$$

GH nerovnosť. Všimneme si, že obrátená hodnota harmonického priemeru je aritmetický priemer obrátených hodnôt. Využijeme teda AG nerovnosť:

$$\frac{1}{H} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}} = \frac{1}{G}$$

$$H \leq G$$

KA nerovnosť, pomocou CS nerovnosti. Vezmime n -tice $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(1, \dots, 1)$, potom C-S nerovnosť nám dáva

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot 1 \right)^2 &\leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right) = n \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n^2} &\leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} \\ \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} &\leq \sqrt[n]{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}} \end{aligned}$$

□

1 AG ľahké príklady

Najznámejšou a asi najvyužívanejšou v príkladoch je tá stredná, AG nerovnosť. Možno aj preto, že aritmetický a geometrický priemer sú najčastejšie používané. Zameriame sa teda najskôr na ňu.

Iný zápis:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \quad (5)$$

Príklad 1. Triviálny príklad na úvod: pre všetky $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ dokážte:

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$$

Riešenie. Stačí priamo aplikovať AG na ľavú stranu:

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3 \sqrt[3]{x^3 y^3 z^3} = 3xyz$$

Príklad 2. Podobný príklad: pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$ dokážte:

$$2x^3 + y^3 \geq 3x^2y$$

Riešenie. Môžeme jednoducho dosadiť $z = x$ do predchádzajúceho príkladu. Čo si tu však môžeme všimnúť, je trojka na pravej strane, ktorá nám indukuje, že nechceme pracovať s dvoma sčítancami na ľavej strane, ale rozdeliť si $2x^3$ na 2 sčítance, a pre tie nerovnosť aplikovať.

Cvičenie 1. Na podobný spôsob:

1. $x^3 + 2 \geq 3x$,
2. $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$
3. $2(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) \geq x^3 + y^3 + z^3 + 15xyz$,
4. $x^3(x + 2y) + y^3(y + 2x) \geq 6x^2y^2$.

2 Sčítanie AG

Príklad 3. Pre $x, y \in \mathbb{R}^+$ dokážte:

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x.$$

Riešenie. Ak vynásobíme rovnicu 3, môžeme využiť príklad 2.

Ako prísť na riešenie? Čím rovnicu vynásobiť? Všimnime si v príkladoch 1,2,3 ako sa menia exponenty z jednej strany na druhú. Môžeme sa na nerovnosti pozerat' tak, že na ľavej strane máme "ľubovoľné" množstvo výrazov daného typu, a chceme z nich poskladať niektorý z výrazov na pravej strane pomocou AG. Symetria nám potom dá aj všetky ostatné členy v správnom počte. Ukážeme si to na príklade.

Príklad 4. Pre $x, y \in \mathbb{R}^+$ dokážte:

$$x^3y + y^3z + z^3x \geq x^2yz + y^2zx + z^2xy.$$

Riešenie. Chceme použiť "niekoľkokrát" výrazy naľavo a dostať z nich "nejaký" násobok x^2yz . Vezmime teda AG takto:

$$ax^3y + by^3z + cz^3x \geq (a + b + c)^{a+b+c} \sqrt[a+b+c]{x^{3a+cy}y^{3b+az}z^{3c+bx}} = x^2yz$$

Z exponentov na pravej strane dostaneme sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} 3a + c &= 2(a + b + c) \\ a + 3b &= (a + b + c) \\ b + 3c &= (a + b + c) \end{aligned}$$

Jej riešením sú napríklad $(a, b, c) = (4, 1, 2)$, z čoho dostávame $4x^3y + y^3z + 2z^3x \geq 7\sqrt[7]{x^2yz}$. Ak vynásobíme pôvodnú nerovnicu 7, dostaneme požadovaný tvar.

Cvičenie 2. 1. $x^7 + y^7 + z^7 \geq x^5y^2 + y^5z^2 + z^5x^2$,

2. $x^4 + y^4 + z^4 \geq x^3y + y^3z + z^3x$,
3. $x^4y + y^4z + z^4x \geq x^2y^2z + y^2z^2x + z^2x^2y$,
4. $(x + y + z)^2 \geq 3(x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy})$,
5. $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$,
6. $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c$,
7. $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$,
8. $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$ **Hinty:** 1

Príklad 5. Výstražný príklad:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$$

Klasická procedúra by nás doviedla ku koeficientom $(7, 5, 1, -1)$ na zostavenie a^2b . Lenže AG platí iba pre kladné sčítance, takže pre $-3abc$ ju nemôžeme použiť. Tu treba teda využiť iné zbrane (Schurova nerovnosť).

3 AG a zlomky

Pri riešení posledných úloh predošlého cvičenia sa dal využiť aj iný trik: pre 5 môžeme využiť $\frac{a^2}{b} + b \geq 2a$, pre 7 využijeme $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + bc \geq 3ab$. Princíp je taký, že vezmem výraz vľavo a sčítam ho s nejakým výrazom vpravo tak, aby sa mi odstránili zlomky. Mocnina v čitateli napovedá, koľko sčítancov mám mať dokopy.

Cvičenie 3. 1. $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c$ **Hinty:** 2

2. $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c$
3. $\frac{a^5}{b^3} + \frac{b^5}{c^3} + \frac{c^5}{a^3} \geq a^2 + b^2 + c^2$ **Hinty:** 3

4 Ďalšie cvičenia na AG:

Cvičenie 4. [Barbeau2000]

1. $x + \frac{1}{x} \geq 2$,
2. $xz + \frac{y}{z} \geq 2\sqrt{xy}$,
3. pre $0 < b \leq a$: $a + b - 2\sqrt{ab} \geq \frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$, **Hinty:** 4
4. pre $n \in \mathbb{N}$, definujeme $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$, končiac 1, resp 2 ak je n nepárne, resp párne. Dokáž
 - (a) $n^n > (2n-1)!!$,
 - (b) $(n+1)^n > (2n)!!$.

Hinty: 5

5. pre $n \in \mathbb{N}$: $(n+1)^n(2n+1)^n \geq 6^n(n!)^2$ **Hinty:** 6

5 Konečne k ostatným priemerom:

Príklad 6. [Barbeau2000]

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}\right) \geq n^2$$

Riešenie. Jednoduchá aplikácia AH nerovnosti.

Úloha 2. [Barbeau2000]

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq x + y - (2 - \sqrt{2})\sqrt{xy}$$

Riešenie. Označme si postupne k, a, g kvadratický, aritmetický a geometrický priemer čísel x, y , potom môžeme nerovnosť dostať do tvaru $k - g \geq \sqrt{2}(a - g)$. Umocníme na druhú, využijeme $k^2 + g^2 = 2a^2$, stačí nám teda ukázať $a \geq \frac{k+g}{2}$, čo získame vďaka KA nerovnosti pre k, g .

Úloha 3. [Barbeau2000]

$$\frac{x_1^2}{x_1 + x_2} + \dots + \frac{x_n^2}{x_n + x_1} \geq \frac{1}{2}(x_1 + \dots + x_n).$$

Riešenie.

Second Solution. Note that, with $x_{n+1} = x_1$, we have, for $1 \leq i \leq n$,

$$\frac{x_i^2}{x_i + x_{i+1}} = x_i - \frac{x_i x_{i+1}}{x_i + x_{i+1}} \geq x_i - \frac{x_i + x_{i+1}}{4}$$

by the AM–GM Inequality. The result follows.

Third Solution. Suppose that $1 \leq i \leq n$ and $x_{n+1} = x_1$.

Since $\frac{x_i^2 - x_{i+1}^2}{x_i + x_{i+1}} = x_i - x_{i+1}$, we have

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{x_i + x_{i+1}} &= \sum_{i=1}^n \frac{x_{i+1}^2}{x_i + x_{i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 + x_{i+1}^2}{x_i + x_{i+1}} \\ &\geq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i + x_{i+1})^2}{x_i + x_{i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

using the AM–GM–RMS Inequality.

Fourth Solution. Note that, with $x_{n+1} = x_1$, we have for $1 \leq i \leq n$, that

$$\frac{x_i^2}{x_i + x_{i+1}} = x_i - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_{i+1}}}{2} \right)^{-1} \geq x_i - \frac{1}{4}(x_i + x_{i+1})$$

by the HM–AM Inequality. The result follows.

Príklad 7. [Barbeau2000] Označme postupne a, g, h aritmetický, geometrický a harmonický priemer dvoch kladných čísel. Dokážte $a + h \geq 2g$.

Riešenie. Jednoduché cvičenie na AG, v podstate stačí dosadiť AG pre a, h a dosadiť vzorce. V podstate sme to už využili v cvičení vyššie. Čo však stojí za všimnutie: vo všeobecnosti (pre väčšie n) to neplatí. Vyskúšajte napr. pre trojicu $1, 1, 8/27$.

Cvičenie 5. [GTMathPowerMeans2016]

$$\sqrt{3(a+b+c)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

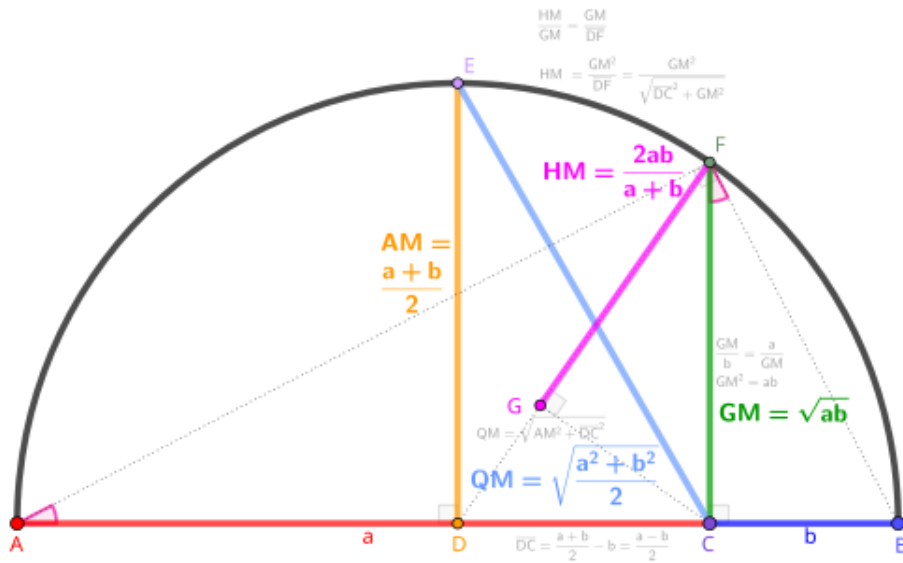
6 Geometrická interpretácia priemerov

Aritmetický priemer dvoch bodov je jednoducho stred úsečky medzi nimi.

Geometrický priemer: nech výška pravouhlého na jeho preponu delí preponu na dve časti a má dĺžku geometrického priemeru dĺžok týchto častí. Na AG nerovnosť tak môžeme pozeráť ako na porovnanie výšky a ťažnice na preponu - aritmetický priemer je polomer opísanej kružnice.

Kvadratický priemer: nech a, b sú odvesny pravouhlého trojuholníka. Potom dĺžka odvesny rovnostranného pravouhlého trojuholníka s rovnakou preponou je rovná kvadratickému priemeru a, b . [Barbeau2000]

Všetky priemery (pre 2 premenné) môžeme do jedného obrázku zakresliť napr. takto:



Obr. 2: Zobrazenie priemerov v polkruhu.[kaghkruh]

7 Hľadanie minima výrazu

Príklad 8. [GTMathPowerMeans2016] Nájdite minimum funkcie $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ ak $x + y + z = 1$.

Riešenie. S využitím AH nerovnosti pre x, y, z dostaneme odhad $f \geq 9$, túto hodnotu dosahuje v $(1/3, 1/3, 1/3)$.

Príklad 9. [MP'prase'prednaska] Nájdite minimum výrazu $a + \frac{1}{(a-b)b}$ pre $a > b$.

Riešenie. vezmime $x = b, y = a - b$, dosadíme a využime AG.

Cvičenie 6. [BrilliantPowerMean] Nájdi minimum výrazu $(2x + 3y)(\frac{8}{x} + \frac{3}{y})$

Hinty

1. Homogenizuj pravú stranu vynásobením $(abc)^{-1/3} = 1$, potom substitúcia $a = u^3, \dots$
2. jeden člen zľava, 2 z prava
3. (a) 5 prvkov
(b) 2 zľava, 3 sprava
(c) nie nutne rôzne
4. vymeň PS a záporný člen vľavo, uprav PS na A+H
5. Pomocou AG dokáž $(a - b)b \leq (\frac{a}{2})^2$
6. Využi vzorec pre súčet štvorcov)