

Trojuholníková nerovnosť

Michal Ilkovič

1 Úvod

Trojuholníková nerovnosť patrí medzi najzákladnejšie a najdôležitejšie tvrdenia v matematickej analýze, lineárnej algebre a geometrii. Vyjadruje intuitívny fakt, že priama cesta medzi dvoma bodmi je vždy najkratšia.

Veta 1 (Trojuholníková nerovnosť v $\mathbb{R}$). *Pre ľubovoľné reálne čísla $x, y \in \mathbb{R}$ platí:*

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (1)$$

Dôkaz. Keďže obe strany nerovnosti sú nezáporné, môžeme ich umocniť na druhú, čím zachováme smer nerovnosti. Upravme ľavú stranu:

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Teraz upravme pravú stranu:

$$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2$$

Porovnaním oboch strán vidíme, že nerovnosť $|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$ je ekvivalentná s nerovnosťou:

$$x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 \iff xy \leq |x||y|$$

Posledná nerovnosť zjavne platí pre každé $x, y \in \mathbb{R}$, nakoľko reálne číslo je vždy menšie alebo rovné svojej absolútnej hodnote. Spätným odmocnením dostávame pôvodné tvrdenie. $\square$

V kontexte lineárnej algebry môžeme toto tvrdenie zovšeobecniť pre ľubovoľný unitárny priestor (vektorový priestor so skalárnym súčinom) nad telesom reálnych alebo komplexných čísel. V moderných matematických štruktúrach zovšeobecňujeme pojem vzdialenosti a uhla pomocou geometrického a algebrického konceptu skalárneho súčinu. Ten nám umožňuje definovať geometriu aj v nekonečnorozmerných abstraktných priestoroch.

Definícia 1 (Definícia skalárneho súčinu). Nech V je vektorový priestor nad telesom reálnych čísel $\mathbb{R}$ (resp. komplexných čísel $\mathbb{C}$). Skalárny súčin na priestore V je zobrazenie $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), ktoré každému páru vektorov $x, y \in V$ priradí skalár a spĺňa nasledujúce axiómy pre ľubovoľné $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$):

- Linearita v prvej zložke:** $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ a $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,
- Konjugovaná symetria:** $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (pre reálny priestor platí priama symetria $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$),
- Pozitívna definitnosť:** $\langle x, x \rangle \geq 0$, pričom $\langle x, x \rangle = 0$ práve vtedy, keď $x = \mathbf{0}$.

Vektorový priestor vybavený takýmto skalárnym súčinom sa nazýva **unitárny priestor**.

Definícia 2. Norma vektora v unitárnom priestore je so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definovaná ako $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Veta 2 (Trojuholníková nerovnosť vo všeobecnom unitárnom priestore). *Nech V je unitárny priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Potom pre ľubovoľné vektory $x, y \in V$ platí:*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (2)$$

Dôkaz. Využijeme vlastnosti skalárneho súčinu (linearitu v prvej zložke a konjugovanú symetriu). Vyjadríme druhú mocninu normy vektora $x + y$:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \|y\|^2 \end{aligned}$$

Súčet komplexného čísla a čísla k nemu konjugovaného je rovný dvojnásobku jeho reálnej časti ($z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$):

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2$$

Teraz aplikujeme *Cauchyho-Schwarzovu-Bunjakovského nerovnosť*, ktorá hovorí, že $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Keďže $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$, platí:

$$\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Dosadením tohto odhadu späť do našej rovnice dostávame:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\ \|x + y\|^2 &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Keďže normy sú z definície nezáporné reálne čísla, odmocnením oboch strán získavame dokazovanú trojuholníkovú nerovnosť $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. $\square$

Klasický dvojrozmerný Euklidov priestor, v ktorom je sformulovaná väčšina geometrických úloh (vrátane hľadania Fermatovho bodu), je špecifickým prípadom unitárneho priestoru. Ide o priestor $\mathbb{R}^2$ vybavený štandardným skalárnym súčinom $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2$. Klasická Euklidovská norma (vzdialenosť od počiatku) je potom priamo indukovaná týmto súčinom:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Trojuholníková nerovnosť v tomto priestore hovorí, že pre ľubovoľné dva vektory (posunutia) platí, že dĺžka ich výsledného súčtu neprevýši súčet ich jednotlivých dĺžok.

Prirodzeným rozšírením pre viacero prvkov (či už čísel alebo vektorov) je tzv. *n*-uholníková nerovnosť, ktorú vieme elegantne dokázať pomocou matematickej indukcie.

Veta 3 (*n*-uholníková nerovnosť). *Nech V je unitárny priestor a $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ sú ľubovoľné vektory pre $n \geq 2$. Potom platí:*

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_n\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \dots + \|x_n\| \quad (3)$$

Dôkaz. Tvrdenie dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na počet vektorov n .

1. **Báza indukcie** ($n = 2$): Pre dva vektory tvrdenie znie $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$, čo je presne základná trojuholníková nerovnosť, ktorej platnosť sme už dokázali.

2. **Indukčný krok:** Predpokladajme, že tvrdenie platí pre nejaké pevné $k \geq 2$ (indukčný predpoklad), teda platí:

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_k\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_k\|$$

Chceme dokázať, že tvrdenie platí aj pre $k + 1$ vektorov. Aplikovaním základnej trojuholníkovej nerovnosti ($n = 2$) na tieto dva objekty dostávame:

$$\|(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) + x_{k+1}\| \leq \|x_1 + x_2 + \cdots + x_k\| + \|x_{k+1}\|$$

Teraz na prvý člen na pravej strane použijeme indukčný predpoklad:

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_k\| + \|x_{k+1}\| \leq (\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_k\|) + \|x_{k+1}\|$$

Složením oboch nerovností dostávame finálny vzťah pre $k + 1$ vektorov:

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_{k+1}\|$$

Tým je indukčný krok ukončený a tvrdenie platí pre každé celé číslo $n \geq 2$. □

2 Úlohy

Úloha 1. Nech priamka p predstavuje rieku, farmár F a krava K sú v rovnakej polrovine určenej p . Pričom farmár je vzdialený od rieky 4 km a krava 1 km. $|FK| = \sqrt{151}$ km. Akú najmenšiu vzdialenosť musí farmár prejsť ak si chce nabráť v rieke vodu do vedra a potom napojiť kravu?

Úloha 2. Kladné čísla a, b, c spĺňajú $a + b + c = 8$. Dokážte, že platí:

$$\sqrt{1+a^2} + \sqrt{4+b^2} + \sqrt{9+c^2} \geq 10.$$

Úloha 3. Pre reálne čísla x, y nájdite minimálnu možnú hodnotu výrazu:

$$V = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(y-x)^2 + 9} + \sqrt{(12-y)^2 + 25}$$

Dôkaz. Výraz interpretujeme v zmysle unitárneho priestoru $\mathbb{R}^2$ s klasickou Euklidovskou normou $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. Jednotlivé odmocniny v súčte reprezentujú normy troch vhodne zvolených vektorov:

$$\mathbf{u} = (x, 2) \implies \|\mathbf{u}\| = \sqrt{x^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 + 4}$$

$$\mathbf{v} = (y-x, 3) \implies \|\mathbf{v}\| = \sqrt{(y-x)^2 + 3^2} = \sqrt{(y-x)^2 + 9}$$

$$\mathbf{w} = (12-y, 5) \implies \|\mathbf{w}\| = \sqrt{(12-y)^2 + 5^2} = \sqrt{(12-y)^2 + 25}$$

Hľadaný výraz V je rovný súčtu noriem $V = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$. Podľa zovšeobecnenej n -uholníkovej nerovnosti (pre $n = 3$) platí:

$$\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \geq \|\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\|$$

Sčítaním jednotlivých zložiek vektorov dostávame výsledný vektor:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = (x + (y-x) + (12-y), 2 + 3 + 5) = (12, 10)$$

Dĺžka (norma) tohto výsledného vektora je konštantná:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\| = \sqrt{12^2 + 10^2} = \sqrt{144 + 100} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$$

Minimálna hodnota výrazu je teda $2\sqrt{61}$. Rovnosť (minimum) nastáva práve vtedy, keď sú vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ kolineárne (smerujú rovnakým smerom), čo zodpovedá situácii, kedy sú ich zložky v rovnakom pomere:

$$\frac{x}{2} = \frac{y-x}{3} = \frac{12-y}{5}$$

Táto sústava lineárnych rovníc má jednoznačné riešenie $x = 2.4$ a $y = 6$, čo potvrdzuje, že minimum je dosiahnuteľné. $\square$

Úloha 4. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b, c platí nerovnosť:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$$

Dôkaz. Úlohu vyriešime geometrickou interpretáciou v rovine $\mathbb{R}^2$. Výrazy pod odmocninami pripomínajú kosínusovú vetu $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \gamma$.

1. Uvažujme bod O ako počiatok sústavy súradníc. Zostrojme tri polopriamky o_1, o_2, o_3 vychádzajúce z O tak, že zovretý uhol $\angle(o_1, o_2) = 60^\circ$ a $\angle(o_2, o_3) = 60^\circ$. Celkový uhol je $\angle(o_1, o_3) = 120^\circ$.
2. Na polopriamku o_1 nanesieme bod A vo vzdialenosti a , na o_2 bod B vo vzdialenosti b a na o_3 bod C vo vzdialenosti c .

Teraz vyjadríme dĺžky strán trojuholníka ABC pomocou kosínusovej vety:

$$|AB| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(60^\circ)} = \sqrt{a^2 - ab + b^2} \quad (\text{keďže } \cos 60^\circ = 1/2)$$

$$|BC| = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos(60^\circ)} = \sqrt{b^2 - bc + c^2}$$

$$|AC| = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos(120^\circ)} = \sqrt{a^2 + ac + c^2} \quad (\text{keďže } \cos 120^\circ = -1/2)$$

Podľa klasickej geometrickej trojuholníkovej nerovnosti pre body A, B, C v rovine platí, že dĺžka cesty cez bod B nemôže byť kratšia ako priama úsečka AC :

$$|AB| + |BC| \geq |AC|$$

Dosadením vypočítaných dĺžok dostávame priamo dokazovanú nerovnosť. Rovnosť nastáva iba v prípade, ak bod B leží na úsečke AC . $\square$

Úloha 5. Pre bod P vnútri konvexného štvoruholníka $ABCD$ dokážte $|AP| + |PD| < |AB| + |BC| + |CD|$.

Úloha 6. V trojuholníku ABC označme M stred BC . Dokážte $|AM| < \frac{|AB| + |AC|}{2}$.

Úloha 7. V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ nájdite bod P , ktorý má minimálny súčet vzdialeností od A, B, C, D .

Úloha 8. (Fermatov bod) V trojuholníku ABC nájdite bod P , ktorý má minimálny súčet vzdialeností od A, B, C .

Úloha 9. Je daný ostrý uhol XOY a v jeho vnútri pevný bod M . Nájdite na ramene OX bod A a na ramene OY bod B tak, aby obvod trojuholníka MAB bol minimálny.

(JBMO)

Dôkaz. Obvod trojuholníka MAB je definovaný ako súčet dĺžok $O_v = MA + AB + BM$. Pozícia bodov A and B je premenlivá. Využijeme princíp osovej súmernosti (zrkadlenia) na rozvinutie tejto „zlomenej“ línie do priamky.

1. Nech M_1 je obraz bodu M v osovej súmernosti podľa priamky OX (rameno uhla). Z vlastností osovej súmernosti vyplýva, že pre ľubovoľný bod $A \in OX$ platí $|MA| = |M_1A|$.
2. Nech M_2 je obraz bodu M v osovej súmernosti podľa priamky OY . Pre ľubovoľný bod $B \in OY$ analogicky platí $|MB| = |M_2B|$.

Dosadením týchto rovností môžeme hľadaný obvod prepísať do tvaru:

$$O_v = M_1A + AB + BM_2$$

Body M_1 a M_2 sú pevne dané. Podľa n -uholníkovej nerovnosti pre štyri body M_1, A, B, M_2 platí, že ich spojnice je najkratšia vtedy a len vtedy, keď body ležia na priamej úsečke spájajúcej krajné body:

$$M_1A + AB + BM_2 \geq M_1M_2$$

Najmenší možný obvod je rovný dĺžke úsečky $|M_1M_2|$. Hľadané optimálne body A a B sú preto jednoznačne určené ako priespečníky priamky M_1M_2 s ramenami uhla: $A = M_1M_2 \cap OX$ and $B = M_1M_2 \cap OY$. Keďže uhol $\angle XOY$ je ostrý, tieto priespečníky vždy existujú a ležia na polopriamkach ramien.

□

Úloha 10. Je daný ostrouhlý trojuholník. Nájdite trojuholník s vrcholmi na jeho stranách s minimálnym obvodom.

3 Ďalšie úlohy

Úloha 11. Nech n je celé číslo, kde $n \geq 3$, a $a_1, a_2, \dots, a_n$ sú dĺžky strán ľubovoľného n -uholníka. Dokážte nerovnosť

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n > \sqrt{2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}.$$

(CKMO 2022/2023)

Úloha 12. Dané je kladné celé číslo $n \geq 4$. Množina A , ktorá obsahuje n rôznych reálnych čísel, sa nazýva írečítá, ak spĺňa nasledujúcu podmienku: pre ľubovoľné reálne číslo $a \in A$ existujú rôzne reálne čísla $x, y, z \in A$ také, že $|x - a|, |y - a|, |z - a| \geq 1$. V závislosti od n určte najväčšie reálne číslo M také, že nerovnosť

$$\sum_{a \in A} |a| \geq M$$

platí pre ľubovoľnú n -prvkovú írečítú množinu A .

(Výberové sústredenie 2025)

Úloha 13. V rovine je daných n bodov ($n \geq 3$), pričom vzdialenosť medzi ľubovoľnými dvoma z nich je najviac D . Dokážte, že počet dvojíc bodov, ktorých vzdialenosť je striktné väčšia ako $\frac{D}{\sqrt{2}}$, nemôže presiahnuť $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$.

(ISL)

Dôkaz. Úlohu sformulujeme v jazyku teórie grafov. Definujme graf $G = (V, H)$, kde vrcholy V sú dané body v rovine. Hranu medzi dvoma vrcholmi X, Y zavedieme práve vtedy, ak ich vzdialenosť spĺňa $|XY| > \frac{D}{\sqrt{2}}$. Naším cieľom je dokázať, že počet hrán $|H| \leq \lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$.

Podľa *Turánovej vety* platí, že ak graf s n vrcholmi neobsahuje kompletný podgraf K_4 (štyri navzájom kompletne prepojené vrcholy), potom maximálny počet jeho hrán je práve $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$. Dôkaz teda zredukujeme na geometrické overenie (sporom), že v Euklidovom priestore $\mathbb{R}^2$ nemôže existencia kompletného podgrafu K_4 nastať.

Predpokladajme, že existujú 4 body A, B, C, D , medzi ktorými je všetkých 6 vzájomných vzdialeností striktne väčších ako $\frac{D}{\sqrt{2}}$ a zároveň žiadna nepresahuje D . Rozoberme dva geometrické prípady usporiadania týchto bodov v rovine:

1. Prípád 1: Jeden bod leží vo vnútri trojuholníka zvyšných troch.

Bez ujmy na všeobecnosti nech bod D leží vo vnútri trojuholníka ABC . Súčet troch vnútorných uhlov okolo bodu D je 360° :

$$\angle ADB + \angle BDC + \angle CDA = 360^\circ$$

Podľa Dirichletovho princípu musí byť aspoň jeden z týchto troch uhlov najmenej 120° . Nech je to $\angle ADB \geq 120^\circ$. Aplikujme kosínusovú vetu na trojuholník ADB pre stranu AB :

$$|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2 - 2|AD||BD|\cos(\angle ADB)$$

Keďže $\angle ADB \geq 120^\circ$, platí $\cos(\angle ADB) \leq -1/2$, z čoho vyplýva $-2\cos(\angle ADB) \geq 1$. Dosadením tohto odhadu a podmienok sporu ($|AD| > \frac{D}{\sqrt{2}}$, $|BD| > \frac{D}{\sqrt{2}}$) dostávame:

$$|AB|^2 \geq |AD|^2 + |BD|^2 + |AD||BD| > \frac{D^2}{2} + \frac{D^2}{2} + \frac{D}{\sqrt{2}} \cdot \frac{D}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}D^2$$

Po odmocnení dostávame $|AB| > \sqrt{1.5}D \approx 1.225D$, čo je v priamom spore s predpokladom, že maximálna vzdialenosť v množine je D .

2. Prípád 2: Body tvoria konvexný štvoruholník.

Nech body tvoria konvexný štvoruholník $ABCD$ v tomto poradí vrcholov po obvode. Súčet vnútorných uhlov štvoruholníka je 360° :

$$\angle DAB + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDA = 360^\circ$$

Podľa Dirichletovho princípu je aspoň jeden z týchto uhlov najmenej 90° . Nech je to uhol pri vrchole B , teda $\angle ABC \geq 90^\circ$. Použijeme kosínusovú vetu pre trojuholník ABC a jeho stranu AC :

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB||BC|\cos(\angle ABC)$$

Pretože $\angle ABC \geq 90^\circ$, platí $\cos(\angle ABC) \leq 0$, a teda $-2|AB||BC|\cos(\angle ABC) \geq 0$. Z toho dostávame:

$$|AC|^2 \geq |AB|^2 + |BC|^2$$

Dosadením podmienok grafu ($|AB| > \frac{D}{\sqrt{2}}$ a $|BC| > \frac{D}{\sqrt{2}}$) získavame:

$$|AC|^2 > \frac{D^2}{2} + \frac{D^2}{2} = D^2 \implies |AC| > D$$

To opäť generuje priamy spor s maximálnou povolenou vzdialenosťou D .

Keďže oba možné geometrické prípady vedú k sporu, kompletný podgraf K_4 nemôže v grafe G existovať. Graf je zhora ohraničený Turánovým číslom, a preto je celkový počet hrán (dvojíc) najviac $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$. $\square$