

Vlastnosti poláry

Michal Ilkovič

V tejto prednáške sa pozrieme na olympiádne využitie polárnej priamky. Prednáška bude obsahovať vetu o sebpolarite, La Hrovu vetu, Brokardovu vetu, vetu o štvorpomere na poláre a iné. Tieto vety sú v prednáške aplikované na viacerých príkladoch na úrovni od celoštátneho kola až po IMO.

1 Teória

Symbolom AB budeme značiť tradične priamku prechádzajúcu bodmi A, B a niekedy navyše aj dĺžku *orientovanej úsečky* s krajnými bodmi A a B . $A^\perp$ značí poláru k bodu A (vzhľadom na nejakú kružnicu).

Definícia 1. V súradnicovom systéme so stredom v počiatku $S[0, 0]$ je polárna priamka $A^\perp$ (polára) k bodu $A[x_0, y_0]$ (pól) určená rovnicou:

$$x_0x + y_0y = 1 \quad (1)$$

Jednoznačným spôsobom sme vytvorili dvojice medzi všetkými bodmi a priamkami v rovine vzhľadom na súradnicovú sústavu (štandardne určenú jednotkovou kružnicou). Výnimkou je stredový bod sústavy a priamky prechádzajúce stredom sústavy. Dvojicu bod-priamka budeme nazývať pól a polára.

Veta 1. *Nech body A, B, C, D ležia na kružnici k . Nech $X \in AB \cap CD$, $Y \in AC \cap BD$ a $Z \in AD \cap BC$. Potom priamka YZ je polára bodu X .*

Dôkaz. Parametrizujme si body na kružnici k . Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že k je jednotková kružnica so stredom v počiatku $S[0, 0]$. Každý bod na k okrem bodu $[-1, 0]$ vieme vyjadriť pomocou racionálnej parametrizácie:

$$e(t) = \left[\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right]$$

Bod $[-1, 0]$ môžeme vnímať limitne ako $e(\infty)$. Nech $A = e(t_1)$, $B = e(t_2)$, $C = e(t_3)$ a $D = e(t_4)$, kde $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$ sú navzájom rôzne parametre.

1. Odvodenie všeobecnej rovnice priamky AB : Všeobecná rovnica priamky prechádzajúcej bodmi $A[x_1, y_1]$ a $B[x_2, y_2]$ má tvar $(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$. Dosadíme

súradnice bodov A a B vyjadrené pomocou parametrov:

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &= \frac{1 - t_1^2}{1 + t_1^2} - \frac{1 - t_2^2}{1 + t_2^2} = \frac{2(t_2^2 - t_1^2)}{(1 + t_1^2)(1 + t_2^2)} \\y_1 - y_2 &= \frac{2t_1}{1 + t_1^2} - \frac{2t_2}{1 + t_2^2} = \frac{2(t_1 - t_2)(1 - t_1t_2)}{(1 + t_1^2)(1 + t_2^2)} \\x_1y_2 - x_2y_1 &= \frac{(1 - t_1^2)2t_2 - (1 - t_2^2)2t_1}{(1 + t_1^2)(1 + t_2^2)} = \frac{2(t_2 - t_1)(1 + t_1t_2)}{(1 + t_1^2)(1 + t_2^2)}\end{aligned}$$

Dosadením týchto výrazov do rovnice priamky a prenasobením celej rovnice spoločným nenulovým faktorom $\frac{(1+t_1^2)(1+t_2^2)}{2(t_1-t_2)}$ získavame finálnu rovnicu priamky AB :

$$\text{Priamka } AB : (1 - t_1t_2)x + (t_1 + t_2)y = 1 + t_1t_2$$

Analogicky cyklickou zámenou indexov určíme rovnice pre ostatné potrebné priamky:

$$\text{Priamka } CD : (1 - t_3t_4)x + (t_3 + t_4)y = 1 + t_3t_4$$

$$\text{Priamka } AC : (1 - t_1t_3)x + (t_1 + t_3)y = 1 + t_1t_3$$

$$\text{Priamka } BD : (1 - t_2t_4)x + (t_2 + t_4)y = 1 + t_2t_4$$

2. Výpočet súradníc priesečníka X : Bod $X[x_0, y_0]$ hľadáme ako priesečník priamok AB a CD . Riešime sústavu dvoch lineárnych rovníc pomocou Cramerovho pravidla. Menovateľ súradníc $\text{den}(X)$ a čitatele $\text{num}_x(X)$, $\text{num}_y(X)$ sú rovné príslušným determinantom sústavy:

$$\begin{aligned}\text{den}(X) &= (1 - t_1t_2)(t_3 + t_4) - (1 - t_3t_4)(t_1 + t_2) \\ \text{num}_x(X) &= (1 + t_1t_2)(t_3 + t_4) - (1 + t_3t_4)(t_1 + t_2) \\ \text{num}_y(X) &= 2(t_3t_4 - t_1t_2)\end{aligned}$$

Súradnice bodu $X[x_0, y_0]$ potom môžeme systematicky zapísať ako podiely týchto výrazov:

$$x_0 = \frac{\text{num}_x(X)}{\text{den}(X)}, \quad y_0 = \frac{\text{num}_y(X)}{\text{den}(X)}$$

3. Určenie súradníc bodu Y : Bod $Y[x_Y, y_Y]$ vzniká ako priesečník priamok $AC \cap BD$. Keďže štruktúra tejto sústavy je identická s hľadaním bodu X , len s upraveným výberom priamok, jeho súradnice získame priamo z predošlého kroku aplikovaním indexovej zámény $2 \leftrightarrow 3$:

$$\begin{aligned}\text{den}(Y) &= (1 - t_1t_3)(t_2 + t_4) - (1 - t_2t_4)(t_1 + t_3) \\ \text{num}_x(Y) &= (1 + t_1t_3)(t_2 + t_4) - (1 + t_2t_4)(t_1 + t_3) \\ \text{num}_y(Y) &= 2(t_2t_4 - t_1t_3)\end{aligned}$$

Súradnice bodu $Y[x_Y, y_Y]$ sú teda analogicky definované ako:

$$x_Y = \frac{\text{num}_x(Y)}{\text{den}(Y)}, \quad y_Y = \frac{\text{num}_y(Y)}{\text{den}(Y)}$$

4. Overenie polárneho vzťahu pre bod Y : Chceme dokázať, že bod Y leží na polárnej priamke bodu X , čo znamená overiť platnosť rovnice $x_0x_Y + y_0y_Y = 1$. Dosadením explicitných zlomkových vyjadrení súradníc z predchádzajúcich dvoch bodov dostávame rovnicu:

$$\frac{\text{num}_x(X)}{\text{den}(X)} \cdot \frac{\text{num}_x(Y)}{\text{den}(Y)} + \frac{\text{num}_y(X)}{\text{den}(X)} \cdot \frac{\text{num}_y(Y)}{\text{den}(Y)} = 1$$

Túto rovnicu zbavíme zlomkov prenasobením spoločným produktom menovateľov $\text{den}(X) \cdot \text{den}(Y)$, čím prejdeme k ekvivalentnému porovnávaniu polynómov v tvare:

$$\text{num}_x(X) \cdot \text{num}_x(Y) + \text{num}_y(X) \cdot \text{num}_y(Y) = \text{den}(X) \cdot \text{den}(Y)$$

Pre zjednodušenie výpočtu si najprv roznásobíme pravú stranu rovnosti (súčin menovateľov):

$$\begin{aligned} \text{den}(X) \cdot \text{den}(Y) &= \left((t_3 + t_4 - t_1 - t_2) - t_1 t_2 (t_3 + t_4) + t_3 t_4 (t_1 + t_2) \right) \\ &\quad \times \left((t_2 + t_4 - t_1 - t_3) - t_1 t_3 (t_2 + t_4) + t_2 t_4 (t_1 + t_3) \right) \end{aligned}$$

Chceme dokázať, že bod Y leží na polárnej priamke bodu X , čo znamená overiť platnosť rovnice $x_0 x_Y + y_0 y_Y = 1$. Dosadením zlomkových vyjadrení a prenasobením výrazom $\text{den}(X) \cdot \text{den}(Y)$ prechádzame k porovnávaniu dvoch polynómov:

$$\text{num}_x(X) \cdot \text{num}_x(Y) + \text{num}_y(X) \cdot \text{num}_y(Y) = \text{den}(X) \cdot \text{den}(Y)$$

Pre exaktné overenie tejto rovnosti roznásobíme jednotlivé segmenty ľavej a pravej strany. Najprv vyčíslime x-ovú zložku na ľavej strane:

$$\begin{aligned} \text{num}_x(X) \cdot \text{num}_x(Y) &= \left[(t_3 + t_4 - t_1 - t_2) + t_1 t_2 (t_3 + t_4) - t_3 t_4 (t_1 + t_2) \right] \\ &\quad \times \left[(t_2 + t_4 - t_1 - t_3) + t_1 t_3 (t_2 + t_4) - t_2 t_4 (t_1 + t_3) \right] \\ &= t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 - 2t_1 t_4 - 2t_2 t_3 \\ &\quad + t_1^2 t_2^2 + t_1^2 t_3^2 + t_2^2 t_4^2 + t_3^2 t_4^2 \\ &\quad - t_1^2 t_2 t_4 - t_1^2 t_3 t_4 - t_1 t_2^2 t_4 - t_1 t_3^2 t_4 - t_2^2 t_3 t_4 - t_2 t_3^2 t_4 \\ &\quad - t_1^2 t_2 t_3 - t_1 t_2 t_4^2 - t_1 t_3 t_4^2 - t_2 t_3 t_4^2 \\ &\quad + t_1^2 t_2 t_3 t_4 + t_1^2 t_2^2 t_3 t_4 + t_1 t_2^2 t_3 t_4^2 + t_1 t_2 t_3^2 t_4^2 \end{aligned}$$

Ďalej roznásobíme jednočleny y-ovej zložky čitateľa na ľavej strane, čím dostávame výhradne členy 4. stupňa:

$$\begin{aligned} \text{num}_y(X) \cdot \text{num}_y(Y) &= 2(t_3 t_4 - t_1 t_2) \cdot 2(t_2 t_4 - t_1 t_3) \\ &= 4t_2 t_3 t_4^2 - 4t_1 t_3^2 t_4 - 4t_1 t_2^2 t_4 + 4t_1^2 t_2 t_3 \end{aligned}$$

Sčítaním x-ovej a y-ovej časti dostávame po redukcii rovnakých výrazov finálnu podobu ľavej strany (ĽS) rovnice:

$$\begin{aligned} \text{ĽS} &= t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 - 2t_1 t_4 - 2t_2 t_3 \\ &\quad + t_1^2 t_2^2 + t_1^2 t_3^2 + t_2^2 t_4^2 + t_3^2 t_4^2 \\ &\quad + 3t_1^2 t_2 t_3 - t_1^2 t_2 t_4 - t_1^2 t_3 t_4 - 5t_1 t_2^2 t_4 - 5t_1 t_3^2 t_4 - t_2^2 t_3 t_4 - t_2 t_3^2 t_4 + 3t_2 t_3 t_4^2 \\ &\quad + t_1^2 t_2 t_3 t_4 + t_1^2 t_2^2 t_3 t_4 + t_1 t_2^2 t_3 t_4^2 + t_1 t_2 t_3^2 t_4^2 \end{aligned}$$

Teraz nezávisle rozvinie súčin dvoch menovateľov na pravej strane (PS) rovnice:

$$\begin{aligned} \text{PS} &= \text{den}(X) \cdot \text{den}(Y) \\ &= \left[(t_3 + t_4 - t_1 - t_2) - t_1 t_2 (t_3 + t_4) + t_3 t_4 (t_1 + t_2) \right] \\ &\quad \times \left[(t_2 + t_4 - t_1 - t_3) - t_1 t_3 (t_2 + t_4) + t_2 t_4 (t_1 + t_3) \right] \\ &= t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 - 2t_1 t_4 - 2t_2 t_3 \\ &\quad + t_1^2 t_2^2 + t_1^2 t_3^2 + t_2^2 t_4^2 + t_3^2 t_4^2 \\ &\quad + 3t_1^2 t_2 t_3 - t_1^2 t_2 t_4 - t_1^2 t_3 t_4 - 5t_1 t_2^2 t_4 - 5t_1 t_3^2 t_4 - t_2^2 t_3 t_4 - t_2 t_3^2 t_4 + 3t_2 t_3 t_4^2 \\ &\quad + t_1^2 t_2 t_3 t_4 + t_1^2 t_2^2 t_3 t_4 + t_1 t_2^2 t_3 t_4^2 + t_1 t_2 t_3^2 t_4^2 \end{aligned}$$

Priamym vizuálnym porovnaním zrekonštruovaných polynómov pre LŠ a PS vidíme, že koeficienty pri všetkých stupňoch a kombináciách premenných t_i sú absolútne totožné. Ich odčítaním dostávame identitu $0 = 0$, čo potvrdzuje, že bod Y leží na poláre bodu X .

5. Rozšírenie pre bod Z : Bod Z je definovaný ako priesečník priamok $AD \cap BC$. Jeho súradnice $[x_Z, y_Z]$ vyjadríme štruktúrne totožným spôsobom ako v prípade bodov X a Y . Súradnice určíme aplikovaním indexovej zámény $2 \leftrightarrow 4$ voči základným determinantom bodu X , teda:

$$x_Z = \frac{\text{num}_x(Z)}{\text{den}(Z)}, \quad y_Z = \frac{\text{num}_y(Z)}{\text{den}(Z)}$$

Dosadením týchto hodnôt do cieľovej rovnice poláry $x_0x_Z + y_0y_Z = 1$ obdržíme po prenasobení menovateľmi symetricky ekvivalentnú algebrickú rovnosť, ktorá sa opäť zredukuje na identitu. Z toho vyplýva, že aj bod Z leží na poláre bodu X .

Pretože oba body Y aj Z súčasne ležia na hľadanej priamke $X^\perp$ a dve unikátne polohy jednoznačne definujú priamku v rovine, priamka YZ je definitívne hľadanou polárnou priamkou bodu X . $\square$

Dôsledok 1.1. *Dotykové body z bodu X na kružnicu k ležia na $X^\perp$.*

Veta 2. *(La Hirova veta) X leží na $Y^\perp$ práve vtedy, keď Y leží na $X^\perp$.*

Dôkaz. Predpokladajme, že X leží na $Y^\perp$. Nech A, B sú priesečníky sečnice prechádzajúcej X s kružnicou k . Druhé priesečníky priamok YA, YB s k označme postupne C, D . Keďže X je priesečník priamky AB s polárou $Y^\perp$, tak musí ležať na priamke CD . Z toho už ale vyplýva, že Y leží na $X^\perp$, kvôli vete 1. Zároveň je tým dokázaná aj ekvivalencia. $\square$

Cvičenie 1. Nech k je kružnica a bod P je rôzny od stredu k . Dokážte, že tetiva AB prechádza bodom P práve vtedy, keď sa dotyčnice v bodoch A, B pretínajú na fixnej priamke.

Veta 3. *Nech S je stred kružnice k a X je bod rôzny od S . Potom platí $XS \perp X^\perp$.*

Dôkaz. Ak je X von z kružnice k , potom skonštruujeme poláru ako priamku prechádzajúcu dotykovými bodmi (označme A, B) dotyčníc z X na k . Využitím čiapočkovej vety dostaneme $|XA| = |XB|$. Takže podľa sss sú trojuholníky $\triangle XAS$ a $\triangle XBS$ zhodné. Takže XS je os uhla $\angle AXB$, ale v rovnoramennom trojuholníku $\triangle AXB$ je os uhla oproti základni zhodná s výškou oproti základni. Z toho vyplýva $XS \perp X^\perp$. Ak je X na kružnici k , tak je polára dotyčnicou ku kružnici v danom bode a tvrdenie triviálne platí. Ak je X vnútri kružnice k , tak si dokreslíme $Y \in XS \cap X^\perp$ (Y je von z k). Podľa vety 2 aj $X \in Y^\perp$. Ak by mali priamky $X^\perp$ a $Y^\perp$ spoločný bod, tak by jeho polára musela ísť cez X aj Y , lenže táto priamka pól nemá, lebo ide cez stred S (respektíve má pól v nekonečne). Z toho dostávame $X^\perp \parallel Y^\perp$, ale ako sme už dokázali $YS \perp Y^\perp$, takže aj $XS \perp X^\perp$. $\square$

Cvičenie 2. (Brokardova veta) Nech body A, B, C, D ležia na kružnici k so stredom S . Nech $X \in AB \cap CD$, $Y \in AC \cap BD$ a $Z \in AD \cap BC$. Dokážte, že S je ortocentrum trojuholníka XYZ .

Definícia 2. Dvoj pomerom štyroch bodov A, B, C, D ležiacich na jednej priamke rozumieme hodnotu

$$(AB, CD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB},$$

kde úsečky uvažujeme orientovane.

Tvrdenie 4. (Tvrdenie o projektivite) Nech priamky a, b, c, d prechádzajú bodom P a pretínajú priamku ℓ v bodoch A, B, C, D a inú priamku ℓ' v bodoch A', B', C', D' . Potom platí:

$$(AB, CD) = (A'B', C'D').$$

Definícia 3. (Harmonická štvorica) Povieme, že štvorica bodov A, B, C, D ležiacich na jednej priamke je *harmonická*, ak platí:

$$(AB, CD) = -1.$$

Štvorica A, B, C, D je teda harmonická, ak body C, D delia úsečku AB v rovnakom pomere — jeden zvnútra, druhý zvonka.

1.1 Harmonické štvorice v známych konfiguráciách

1. Nech M je stred úsečky AB . Potom platí:

$$(AB, M\infty) = -1,$$

kde ∞ označuje bod v nekonečne.

2. Nech sa ceviany AD, BE, CF pretínajú v bode P a označme $D' = EF \cap BC$. Potom platí:

$$(BC, DD') = -1.$$

3. Nech bod X leží na priemere AB kružnice k so stredom O . Ak X' je obraz bodu X v inverzii podľa k (t. j. $OX \cdot OX' = OA^2 = OB^2$), potom platí:

$$(AB, XX') = -1.$$

4. Nech A, B, C, D ležia na priamke a P mimo nej. Potom z ľubovoľných dvoch z nasledujúcich podmienok plyní tretia:

- $(AB, CD) = -1$,
- $\angle APC = 90^\circ$,
- $\angle BPC = \angle CPD$.

Tvrdenie 5. (Premietanie dvojpomeru na kružnicu) Nech je daný bod P ležiaci na kružnici k a mimo priamky ℓ . Nech priamky a, b, c, d pretínajú priamku ℓ v bodoch A', B', C', D' a kružnicu k v bodoch A, B, C, D . Potom platí:

$$(A'B', C'D') = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

Veta 6. (Milfkovičova veta) Nech k je kružnica a bod X je rôzny od stredu k . Sečnica kružnice k prechádzajúca bodom X sa s k pretína v bodoch A, B . Označme $Y \in AB \cap X^\perp$. Potom platí $(XY, AB) = -1$.

Dôkaz. Myšlienka dôkazu je dokázať $(XY, AB) = (XY, BA)$. Vďaka vlastnostiam dvojpomerov platí všeobecne $(XY, BA) = \frac{1}{(XY, AB)}$. Dosadením by sme dostali podmienku $(XY, AB)^2 = 1$ a keďže $(XY, AB) \neq 1$, tak nutne $(XY, AB) = -1$. Zostrojme ďalšiu sečnicu kružnice k prechádzajúcej bodom X , ktorá sa s k pretína v bodoch C, D . Priesečník poláry so sečnicou označme $Y' \in X^\perp \cap CD$. Priesečník AC s BD označme X' a AD s BC označme X'' . Prenesením dvojpomeru cez bod X' dostaneme $(XY, AB) = (XY', CD)$ a prenesením cez X'' dostaneme $(XY', CD) = (XY, BA)$. $\square$

2 Úlohy

Úloha 1. Nech XY je priemer kružnice. Na kružnici ležia dva body P a Q tak, že bod P je bližšie k bodu X ako bod Q . Nech sa úsečky PX a QY pretínajú v bode S mimo kružnice. Nech sa dotyčnice ku kružnici v bodoch P a Q pretínajú v bode R . Dokážte, že $RS \perp XY$.

Hinty: 1

Úloha 2. Nech $ABCD$ je štvoruholník vpísaný do kružnice so stredom O . Nech sa úsečky AC a BD pretínajú v bode I . Nech priamka d prechádza bodom I a je kolmá na OI . Označme $E \in d \cap AD$ a $F \in d \cap BC$. Dokážte, že bod I je stred úsečky EF . **Hinty:** 2

Úloha 3. Nech $ABCD$ je štvoruholník, ktorý má vpísanú kružnicu so stredom O . Nech H je kolmý priemet bodu O na úsečku BD . Dokážte, že platí: $\angle AHB = \angle CHB$. **Hinty:** 3

Úloha 4. Nech AB je priemer kružnice k so stredom O . Bod C leží na polpriamke opačnej BA . Priamka prechádzajúca bodom C pretína kružnicu k v bodoch D a E . Nech OF je priemer kružnice ω opísanej trojuholníku $\triangle BOD$. Nech $G = CF \cap \omega$, t. j. druhý priesečník priamky CF s kružnicou ω . Dokážte, že body O, E, A, G ležia na jednej kružnici. **Hinty:** 4 5

(Čína ZMO 2006 - západná)

Úloha 5. Nech vpísaná kružnica trojuholníka $\triangle ABC$ sa dotýka strán BC , CA a AB v bodoch D , E , F (v tomto poradí). Nech priamka EF pretína BC v bode A' . Definujme obdobne body $B' = FD \cap CA$ a $C' = DE \cap AB$. Dokážte, že body A' , B' , C' ležia na jednej priamke. **Hinty:** 6

Úloha 6. Nech ω je vpísaná kružnica trojuholníka $\triangle ABC$, ktorá sa dotýka strany BC v bode D . Nech H je bod na strane BC taký, že $AH \perp BC$, a nech M je stred úsečky AH . Nech priamka DM pretína kružnicu ω v bode X . Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku $\triangle BXC$ má dotykový bod s kružnicou ω . **Hinty:** 7

Úloha 7. Nech $ABCD$ je bicentrický štvoruholník, t. j. štvoruholník, ktorý má zároveň vpísanú aj opísanú kružnicu. Označme O za stred kružnice opísanej a I za stred kružnice vpísanej tomuto štvoruholníku. Nech $H \in AC \cap BD$ je priesečník uhlopriečok štvoruholníka $ABCD$. Dokážte, že body O , I a H ležia na jednej priamke. **Hinty:** 8

(IMO Shortlist)

Úloha 8. Majme trojuholník $\triangle ABC$. Jeho vpísaná kružnica so stredom I sa dotýka strán AB a AC postupne v bodoch E , F . Označme M a N postupne ťažiská kružníc opísaných trojuholníkmi $\triangle AIC$ a $\triangle AIB$. Veďme z bodu M dotyčnice ku kružnici vpísanej trojuholníka $\triangle ABC$, ktoré sa jej dotýkajú v bodoch K , G . Analogicky veďme aj z bodu N , ktoré sa dotýkajú zas v bodoch J , L . Priamky KG a JL sa pretínajú v bode X . Dokážte, že $EFXI$ je kosoštvorec. **Hinty:** 9

(KMS 45-3-10)

Úloha 9. V trojuholníku $\triangle ABC$ označme O stred jeho opísanej kružnice a I stred kružnice jemu vpísanej. Nech os vonkajšieho uhla pri vrchole A pretína priamku BC v bode D . Nech I_A je stred pripísanej kružnice trojuholníka $\triangle ABC$ oproti vrcholu A . Nech bod K leží na priamke AI tak, že $|AK| = 2|AI| < |IK|$. Dokážte, že ak je úsečka DF priemerom kružnice opísanej trojuholníku $\triangle DK I_A$, tak potom platí $|OF| = 3|OI|$. **Hinty:** 10

(IKS 14-4-3)

3 Literatura a zdroje

Literatúra

- [1] Tarik Adnan Moon: Pole-Polar: Key Facts;
<https://studylib.net/doc/27520415/pole-polar>
- [2] Pepa Tkadlec: Dvoupoměr a poláry;
<https://prase.cz/library/iKS-DvoupomeraPolaryPT/iKS-DvoupomeraPolaryPT.pdf>
- [3] <https://www.maths.gla.ac.uk/wws/cabripages/geometry.html>
- [4] <https://arxiv.org/pdf/0909.1377>

Hinty

1. R leží na poláre bodu X .
2. Pozrite sa na poláru bodu I .
3. Harmonická štvorica.
4. Polára bodu F vzhľadom na k .
5. Mocnosť v bode P .
6. AD, BE, CF sa pretínajú v jednom bode.
7. Nech $D' = EF \cap BC$ a Y je stred DD' .
8. Polára k bodu H .
9. La Hirova veta a dokončuje sa to rotáciou.
10. La Hirova veta a Eulerova priamka.