

Grafy

Barbora Novosadová
barbora.novosadova@trojsten.sk

Poznámka: V tomto materiály čerpám najmä z [kovar'grafy'skriptum] a [Minarik'bipartitni'grafy] ako aj z vlastných poznámok z Teórie grafov s doc.M. Mačajom. Keďže materiály sa značne prelínajú, neuvádzam presné citácie.

1 Definícia

Definícia 1. (*Jednoduchý neorientovaný*) *graf (bez slučiek a násobných hrán)* je usporiadaná dvojica (V, E) , kde V je konečná množina a E je podmnožina množiny všetkých dvojprvkových podmnožín V .

Neformálne, V je množina vrcholov a E je množina hrán, s tým, že ak medzi vrcholmi v a w existuje hrana, tak dvojica $\{v, w\}$ je v E .

Definícia 2. *Veľkosť grafu* = počet jeho vrcholov.

Susedia vrchola v = všetky $u \in V$ také že $\{u, v\} \in E$, teda existuje hrana medzi u a v .

Stupeň vrchola = počet jeho susedov, značíme $\deg(v)$, prípadne $d(v)$. Graf je *pravidelný*, ak všetky vrcholy majú rovnaký stupeň.

Definícia 3. Niektoré základné typy grafov: *Kompletný graf* je graf, v ktorom sú všetky hrany (E je celá množina dvojprvkových podmnožín V).

Kružnica dĺžky n : postupnosť vrcholov $x_1, x_2, \dots, x_n$ s hranami $\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_n, x_1\}$.

Cesta dĺžky n : postupnosť vrcholov $x_1, x_2, \dots, x_n$ s hranami $\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_{n-1}, x_n\}$.

Tvrdenie 1. V grafe $G(V, E)$ platí $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$, teda súčet stupňov vrcholov je rovný dvojnásobku počtu hrán.

Dôkaz. Každá hrana má dva konce, teda prispieva jednotkou k stupňu 2 vrcholov. Do súčtu naľavo teda každá hrana prispela dvakrát jednotkou. Formálne:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{e \in E} \sum_{v \in V, v \in e} 1 = \sum_{v \in V, v \in E} \sum_{e \in E} 1 = 2|E|$$

□

Dôsledok 1.1. Počet vrcholov nepárneho stupňa je párny.

Dôkaz. Dokáž sporom pomocou tvrdenia 1

□

2 Podgrafy

Definícia 4. Graf $G' = (V', E')$ je *podgrafom* grafu $G = (V, E)$, pokiaľ $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$. *Faktor* je podgraf na všetkých vrchoch. *Vlastný podgraf* je podgraf, kde $V \neq V'$ alebo $E \neq E'$. *Indukovaný podgraf* obsahuje všetky hrany pôvodného grafu incidentné s vrcholmi vo V' , teda ak v pôvodnom grafe je hrana medzi $v, w \in V'$, potom táto hrana je aj v podgrafe.

Všimnime si, že v definícii podgrafu treba vyžadovať, aby G' bol graf - nie každá dvojica podmnožín (V', E') nám dáva graf.

Úloha 1. Môže byť indukovaný faktor vlastným podgrafom?

Úloha 2. Predpokladajme, že rozlišujeme jednotlivé vrcholy. Koľko rôznych faktorov má daný graf?

Úloha 3. Predpokladajme, že rozlišujeme jednotlivé vrcholy. Koľko rôznych podgrafov má kompletný graf K_n ?

Úloha 4. Identifikujte indukované podgrafy kompletného grafu.

3 Súvislosť

Definícia 5. Graf nazývame *súvislý*, pokiaľ existuje cesta medzi ľubovoľnými dvoma jeho vrcholmi. *Komponent súvislosti* grafu je najväčší súvislý podgraf (vzhľadom na reláciu byť súvislý).

Úloha 5. Ukážte, že v súvislom grafe sa každé 2 najdlhšie cesty pretínajú. **Hinty:** 1

Úloha 6. Koľko najviac hrán môže mať graf s n vrcholmi a k komponentami?

Úloha 7. Pre párne číslo n nájdite pravidelný graf stupňa $(n/2 - 1)$ s n vrcholmi.

Úloha 8. Nech u je vrchol nepárneho stupňa grafu G . Ukážte, že potom existuje cesta z u do v , kde $v \neq u$ a $\deg(v)$ je nepárny. **Hinty:** 2

4 Stromy

Definícia 6. *Les* je acyklický graf, teda neobsahuje žiadnu kružnicu. Súvislý acyklický graf (súvislý les), nazývame *strom*. Vrchol stupňa 1 nazývame *list*. *Most* je hrana, ktorej odstránením sa zvýši počet komponentov súvislosti. *Les* je acyklický graf.

Les je acyklický, nie nutne súvislý graf. Jeho komponenty súvislosti sú súvislé a acyklické, teda stromy.

Tvrdenie 2. *Strom na aspoň 2 vrchoch má aspoň 1 list.*

Dôkaz. Nech každý vrchol má stupeň aspoň 2. Zoberme najdlhšiu cestu. Potom z jej koncového vrchola musí ísť hrana do niektorého iného vrchola tej cesty, čo ale dáva cyklus. $\square$

Úloha 9. Ukážte, že odobraním listu zo stromu s $n > 1$ vrcholmi vznikne strom s $n - 1$ vrcholmi.

Úloha 10. Ukážte, že pre strom $T = (V, E)$ platí $|E| = |V| - 1$. **Hinty:** 3

Ekvivalentné definície stromu na n vrcholoch:

- súvislý graf s $n - 1$ hranami
- acyklický graf s $n - 1$ hranami
- súvislý graf, kde každá hrana je most
- graf, v ktorom medzi každými 2 vrcholmi existuje práve 1 cesta.

Na danej množine vrcholov je teda graf maximálny acyklický a minimálny súvislý graf. (Min/max vzhľadom k počtu hrán, teda pridaním hrany vznikne cyklus, odobraním hrany sa preruší súvislosť.)

Cvičenie 1. Dokážte, že tie definície sú naozaj ekvivalentné s definíciou stromu.

Príklad 1. Ukážte, že počet listov v strome $T = (V, E)$ je aspoň $n = \max_{v \in V} \deg(v)$.

Riešenie. Vieme, že každý strom má list. Odstránením vrchola stupňa n , dostaneme n komponentov súvislosti - stromov.

Cvičenie 2. Nech F_n je les s k komponentami, ukážte, že počet hrán je $n - k$

Cvičenie 3. Dokážte, že ak $\min_{v \in V} \deg(v) \geq 2$, potom graf obsahuje cyklus.

Cvičenie 4. Dokážte (alebo vyvráťte), že každý graf, ktorý má menej hrán ako vrcholov, má aspoň jeden komponent súvislosti, ktorý je stromom.

Definícia 7. Podgraf, ktorý obsahuje všetky vrcholy a je strom, nazývame *kostra*.

Úloha 11. Dokážte, že každý súvislý graf má kosť. **Hinty:** 4

Hinty

1. Zoberte 2 disjunktné cesty a nájdite dlhšiu.
2. Použi dôsledok 1.1 na komponent súvislosti, v ktorom je u .
3. Indukciou: Pre $|V| = 1$ zjavne platí. Majme strom o n vrcholoch a $n - 1$ hranách. Potom pridaním vrchola môžeme pridať najviac 1 hranu (inak kružnica).
4. odoberaj hrany.