

Cevova a Menealova veta

Michal Ilkovič michal.ilkovic@trojsten.sk

Letná škola matematiky 2026

Abstrakt

Prednáška je zameraná na dve kľúčové vety projektívnej a afinnej geometrie trojuholníka – **Cevovu vetu** a **Menelaovu vetu**. Obe vety poskytujú elegantné a silné kritériá pre kolinearitu bodov a konkurenciu priamok, ktoré tvoria základ riešenia pokročilých úloh matematických olympiád.

1 Cevova veta

1.1 Návodné úlohy a motivácia

Cvičenie 1 (Motivačná úloha na začiatok). Ťažnica v trojuholníku je priamka prechádzajúca stredom nejakej jeho strany a protiľahlým vrcholom.

1. Dokážte, že ťažnice v trojuholníku sa pretínajú v jednom bode.
2. Dokážte, že rozdeľujú trojuholník na 6 menších s rovnakým obsahom.

Toto tvrdenie je samo o sebe celkom obtiažné dokázať, pretože pri ňom musíme využívať trikové dôkazové techniky. Našťastie Cevova veta nám ponúka kladivo, pomocou ktorého sa stáva úloha o konkurentnosti troch priamok rutina.

Predtým, než sformulujeme samotné vety, preskúmame dve fundamentálne vlastnosti geometrických konfigurácií. Tieto úlohy slúžia ako priama intuícia k objaveniu dôkazových mechanizmov Cevovej vety.

Cvičenie 2 (Motivácia pre Cevovu vetu: Pomer obsahov). Nech ABC je trojuholník a X je ľubovoľný bod ležiaci na strane BC (rôzny od vrcholov).

1. Dokážte, že pomer dĺžok úsečiek BX a XC je rovný pomeru obsahov trojuholníkov ABX a ACX , teda $\frac{BX}{XC} = \frac{S_{\triangle ABX}}{S_{\triangle ACX}}$.
2. Ak zvolíme ľubovoľný bod P , ktorý leží na úsečke AX , dokážte, že platí rovnosť:

$$\frac{BX}{XC} = \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}$$

Dôkaz. 1. Spustíme kolmicu z vrcholu A na priamku strany BC a označme jej dĺžku (výšku trojuholníka) ako v_a . Pre obsahy trojuholníkov platí $S_{\triangle ABX} = \frac{1}{2} \cdot BX \cdot v_a$ a $S_{\triangle ACX} = \frac{1}{2} \cdot XC \cdot v_a$. Ich podielom dostávame:

$$\frac{S_{\triangle ABX}}{S_{\triangle ACX}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BX \cdot v_a}{\frac{1}{2} \cdot XC \cdot v_a} = \frac{BX}{XC}$$

2. Analogicky, ak sa pozrieme na trojuholníky PBX a PCX , majú spoločnú výšku z vrcholu P na stranu BC . Preto platí $\frac{BX}{XC} = \frac{S_{\triangle PBX}}{S_{\triangle PCX}}$. Z algebraickej vlastnosti zlomkov (ak $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, potom $\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$) dostávame:

$$\frac{BX}{XC} = \frac{S_{\triangle ABX} - S_{\triangle PBX}}{S_{\triangle ACX} - S_{\triangle PCX}} = \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}$$

Tento výsledok je kľúčom k celému dôkazu Cevovej vety, pretože nám umožňuje nahradiť dĺžky strán na obvode trojuholníka pomermi obsahov vnútorných trojuholníkov. $\square$

1.2 Hlavná veta

Definícia 1. Nech ABC je trojuholník. Uvažujme body X, Y, Z také, že $X \in BC$, $Y \in CA$ a $Z \in AB$, pričom žiadny z týchto bodov nesplýva s vrcholom trojuholníka. Priamky AX, BY, CZ nazývame **čeviany**. Ak sa priamky AX, BY, CZ pretínajú v jednom bode P , tento bod nazývame **Cevov bod** vzhľadom na trojuholník ABC .

Veta 1 (Cevova veta). Nech ABC je trojuholník a X, Y, Z sú body na priamkach BC, CA, AB rôzne od vrcholov. Priamky AX, BY, CZ sa pretínajú v jednom bode (sú konkurentné) alebo sú rovnobežné práve vtedy, keď pre absolútne dĺžky úsečiek platí:

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$

Dôkaz. Dokážeme priamu implikáciu pomocou pomerov obsahov trojuholníkov. Predpokladajme, že priamky AX, BY, CZ sa pretínajú v bode P .

Uvažujme trojuholníky ABP a ACP . Bod X delí stranu BC . Obsahy trojuholníkov so spoločným vrcholom sú v pomere ich základní. Preto platí:

$$\frac{BX}{XC} = \frac{S_{\triangle ABX}}{S_{\triangle ACX}} = \frac{S_{\triangle PBX}}{S_{\triangle PCX}}$$

Z vlastností zlomkov dostávame:

$$\frac{BX}{XC} = \frac{S_{\triangle ABX} - S_{\triangle PBX}}{S_{\triangle ACX} - S_{\triangle PCX}} = \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}}$$

Analogicky vyjadríme pomery pre ostatné strany:

$$\frac{CY}{YA} = \frac{S_{\triangle BCP}}{S_{\triangle ABP}}, \quad \frac{AZ}{ZB} = \frac{S_{\triangle ACP}}{S_{\triangle BCP}}$$

Teraz tieto tri rovnosti vynásobíme:

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{S_{\triangle ACP}}{S_{\triangle BCP}} \cdot \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}} \cdot \frac{S_{\triangle BCP}}{S_{\triangle ABP}} = 1$$

Tým je priamy smer dokázaný. Opačný smer sa dokazuje analogicky sporom. $\square$

Veta 2 (Trigonometrická Cevova veta). Nech AD, BE, CF sú čeviany v trojuholníku ABC . Tieto priamky sa pretínajú v jednom bode práve vtedy, keď:

$$\frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle DAC} \cdot \frac{\sin \angle CBE}{\sin \angle EBA} \cdot \frac{\sin \angle ACF}{\sin \angle FCB} = 1$$

Dôkaz. Najprv predpokladajme, že AD, BE, CF sa pretínajú v spoločnom bode X . Všimnime si pomery obsahov čiastkových trojuholníkov vyjadrené pomocou sínusov uhlov:

$$\frac{S_{\triangle BAX}}{S_{\triangle XAC}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AX \cdot \sin \angle BAX}{\frac{1}{2}AX \cdot AC \cdot \sin \angle XAC} = \frac{AB \cdot \sin \angle BAD}{AC \cdot \sin \angle DAC}$$

A analogicky pre ostatné dvojice trojuholníkov platí:

$$\frac{S_{\triangle CBX}}{S_{\triangle XBA}} = \frac{BC \cdot \sin \angle CBE}{BA \cdot \sin \angle EBA}, \quad \frac{S_{\triangle ACX}}{S_{\triangle XCB}} = \frac{CA \cdot \sin \angle ACF}{CB \cdot \sin \angle FCB}$$

Z toho priamo vyplýva:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle DAC} \cdot \frac{\sin \angle CBE}{\sin \angle EBA} \cdot \frac{\sin \angle ACF}{\sin \angle FCB} &= \frac{AB \cdot \sin \angle BAD}{AC \cdot \sin \angle DAC} \cdot \frac{BC \cdot \sin \angle CBE}{BA \cdot \sin \angle EBA} \cdot \frac{CA \cdot \sin \angle ACF}{CB \cdot \sin \angle FCB} \\ &= \frac{S_{\triangle BAX}}{S_{\triangle XAC}} \cdot \frac{S_{\triangle CBX}}{S_{\triangle XBA}} \cdot \frac{S_{\triangle ACX}}{S_{\triangle XCB}} = 1 \end{aligned}$$

Opačná implikácia vyplýva z argumentu, ktorý je takmer identický s dôkazom dĺžkovej formy Cevovej vety. $\square$

1.3 Cvičenia na Cevovu vetu

Cvičenie 3 (Gergonov a Lemoinov bod). Nech ABC je trojuholník.

1. Uvažujme kružnicu vpísanú trojuholníku ABC , ktorá sa dotýka strán AB, BC, CA postupne v bodoch Z_1, X_1, Y_1 . Dokážte, že priamky AX_1, BY_1, CZ_1 sú konkurentné (**Gergonov bod**).
2. Uvažujme kružnicu opísanú trojuholníku ABC . Nech dotyčnice k tejto kružnici v bodoch B a C sa pretínajú v bode X_2 , dotyčnice v C a A v bode Y_2 a dotyčnice v A a B v bode Z_2 . Priamky AX_2, BY_2, CZ_2 sa nazývajú symmediány. Dokážte, že sú konkurentné (**Lemoinov / Symmediánový bod**).

Dôkaz. Uvedomme si, že v oboch prípadoch hrá kľúčovú rolu zhodnosť úsečiek dotyčníc spustených z jedného bodu k danej kružnici.

1. Pre Gergonov bod ležia body dotyku X_1, Y_1, Z_1 priamo na stranách. Dĺžky dotyčníc z jednotlivých vrcholov sú zhodné, teda platí $AZ_1 = AY_1$, $BZ_1 = BX_1$ a $CX_1 = CY_1$. Po dosadení do Cevovej vety dostávame:

$$\frac{AZ_1}{Z_1B} \cdot \frac{BX_1}{X_1C} \cdot \frac{CY_1}{Y_1A} = \frac{AY_1}{BX_1} \cdot \frac{BX_1}{CY_1} \cdot \frac{CY_1}{AY_1} = 1$$

Priamky sú teda konkurentné.

2. Pre Lemoinov bod priesečníky dotyčníc X_2, Y_2, Z_2 ležia mimo trojuholníka, avšak priamky AX_2, BY_2, CZ_2 pretínajú protiľahlé priamky strán v nejakých bodoch X, Y, Z . Z vlastností dotyčníc ku kružnici opísanej a sínusovej vety (alebo použitím vlastností harmonických pólů a polár) vyplýva, že dĺžkový pomer, v akom čeviana AX_2 pretína stranu BC , je daný štvorcom príľahlých strán:

$$\frac{BX}{XC} = \frac{c^2}{b^2}$$

Cyklickou zámenou dostaneme zvyšné pomery $\frac{CY}{YA} = \frac{a^2}{c^2}$ a $\frac{AZ}{ZB} = \frac{b^2}{a^2}$. Ich súčin je:

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} = 1$$

Algebraická podstata oboch dôkazov je vďaka symetrii dotyčníc štruktúrne identická a v oboch prípadoch vedie priamo k splneniu Cevovej vety. $\square$

Cvičenie 4 (Nagelov bod). Nech ABC je trojuholník. Uvažujme tri pripísané kružnice, pričom kružnica proti vrcholu A sa dotýka strany BC v bode X , kružnica proti B sa dotýka CA v Y a kružnica proti C sa dotýka AB v Z . Dokážte, že priamky AX, BY, CZ sú konkurentné.

Dôkaz. Označme polobvod trojuholníka ako $s = \frac{a+b+c}{2}$. Zo základných geometrických vlastností pripísaných kružníc (kde vzdialenosť od vrcholu k bodu dotyku na predĺženej strane je rovná práve polobvodu s) vieme presne vyjadriť dĺžky úsečiek, na ktoré body X, Y, Z delia strany trojuholníka:

$$AZ = s - b, \quad ZB = s - a$$

$$BX = s - c, \quad XC = s - b$$

$$CY = s - a, \quad YA = s - c$$

Tieto body zjavne ležia vnútri príslušných strán. Zostavíme súčin ich pomerov pre Cevovu vetu:

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{s-b}{s-a} \cdot \frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-a}{s-c} = 1$$

Všetky členy sa navzájom vykratujú a výsledný súčin je rovný 1. Podľa Cevovej vety sú priamky konkurentné v jednom bode, ktorý nazývame Nagelov bod. $\square$

Úloha 1. Predpokladajme, že strany AB, AC a BC trojuholníka ABC majú postupne dĺžky 13, 14 a 15. Ak pre čeviany AD, BE, CF plne konkurentné v bode X platí $\frac{AF}{FB} = \frac{2}{5}$ a $\frac{CE}{EA} = \frac{5}{8}$, nájdite dĺžky úsečiek BD and DC .

Dôkaz. Podľa Cevovej vety pre trojuholník ABC a bod konkurencie X platí:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

Dosadíme známe pomery zo zadania úlohy:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{5}{8} = 1 \implies \frac{2}{8} \cdot \frac{BD}{DC} = 1 \implies \frac{BD}{DC} = 4$$

Vieme, že bod D leží na strane BC , ktorej celková dĺžka je $BC = BD + DC = 15$. Vyjadríme $BD = 4DC$ a dosadíme do rovnice pre dĺžku strany:

$$4DC + DC = 15 \implies 5DC = 15 \implies DC = 3$$

Následne dopočítame $BD = 4 \cdot 3 = 12$. Hľadané dĺžky úsečiek sú $BD = 12$ a $DC = 3$. $\square$

Úloha 2. V trojuholníku ABC sú čeviany AD, BE, CF konkurentné. Body P, Q, R ležia postupne na úsečkách EF, FD, DE tak, že priamky DP, EQ, FR sú konkurentné. Dokážte, že priamky AP, BQ, CR sú taktiež konkurentné.

Dôkaz. Úlohu môžeme elegantne vyriešiť transformáciou pomerov pomocou Cevovej a trigonometrickej Cevovej vety. Konkurencia priamok DP, EQ, FR v trojuholníku DEF nám podľa Cevovej vety dáva informáciu o pomeroch delenia strán EF, FD, DE bodmi P, Q, R .

Pri prechode k pôvodnému trojuholníku ABC vyjadríme uhly, ktoré zvierajú priamky AP, BQ, CR s príslušnými stranami, pomocou sínusov uhlov v trojuholníku DEF a polôh bodov delenia. Aplikáciou trigonometrickej verzie Cevovej vety na trojicu čevian AP, BQ, CR v trojuholníku ABC a rozpísaním príslušných sínusových pomerov cez Cevov bod čevian AD, BE, CF zistíme, že výsledný súčin je presne rovný 1. To potvrdzuje, že priamky AP, BQ, CR sa pretínajú v jednom spoločnom bode. $\square$

Úloha 3. Nech K, L, M sú stredy a D, E, F ľubovoľné vnútorné body zaradom strán BC, CA, AB trojuholníku ABC . Označme K', L', M' stredy úsečiek AD, BE, CF . Priamky AD, BE, CF sa pretínajú v jednom bode práve vtedy, keď sa v jednom bode pretínajú priamky KK', LL', MM' . Dokážte.

2 Menelaova veta

Cvičenie 5 (Motivácia pre Menelaovu vetu: Prenos pomerov cez kolmice). Nech ABC je trojuholník a priamka p pretína priamky strán AB a BC v bodoch Z a X . Spustíme kolmice z vrcholov A a B na priamku p a ich dĺžky označme h_A a h_B . Dokážte, že absolútna hodnota pomeru $\frac{AZ}{ZB}$ závisí výhradne od pomeru týchto dvoch výšok.

Dôkaz. Nech päť kolmíc z bodov A, B na priamku p sú postupne A_0, B_0 . Uvažujme pravouhlé trojuholníky $\triangle AA_0Z$ a $\triangle BB_0Z$. Tieto trojuholníky sú podobné podľa vety uu , pretože:

- Uhly $\angle AA_0Z$ a $\angle BB_0Z$ sú pravé (90°).
- Uhly $\angle AZA_0$ a $\angle BZB_0$ sú vrcholové (alebo súhlasné, podľa polohy bodu Z).

Z podobnosti $\triangle AA_0Z \sim \triangle BB_0Z$ priamo vyplýva rovnosť pomerov odpovedajúcich strán:

$$\left| \frac{AZ}{ZB} \right| = \frac{AA_0}{BB_0} = \frac{h_A}{h_B}$$

Táto úloha nám ukazuje, že zložité rezy priamkou vieme transformovať na jednoduché lineárne pomery pomocných kolmíc (výšok) prislúchajúcich jednotlivým vrcholom. Pri Menelaovej vete sa po vynásobení všetkých troch pomerov tieto výšky navzájom kompletne vyrušia. $\square$

Cevova veta sa zaoberá podmienkou, kedy sa tri čeviany (priamky spájajúce vrcholy s bodmi na protiľahlých priamkach strán) pretínajú v jednom spoločnom bode.

Na rozdiel od Cevovej vety sa Menelaova veta zaoberá kolinearitou troch bodov. Aby sme ju mohli sformulovať exaktne vrátane polohy bodov voči stranám, musíme zaviesť pojem orientovanej úsečky.

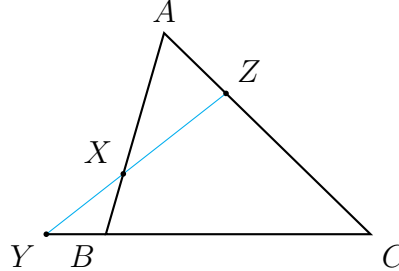
Definícia 2. Nech A, B, X sú tri kolineárne body. Orientovaný pomer $\frac{AX}{XB}$ definujeme nasledovne:

- Ak bod X leží medzi bodmi A a B (vnútri úsečky AB), potom majú vektory $\vec{AX}$ a $\vec{XB}$ rovnaký smer a pomer je kladný.
- Ak bod X leží mimo úsečky AB (na jej predĺžení), potom majú vektory $\vec{AX}$ a $\vec{XB}$ opačný smer a pomer je záporný.

Vďaka tejto definícii môžeme presne určiť, či sečnica pretína vnútro strán alebo ich predĺženia.

Veta 3 (Menelaova veta v orientovanom zmysle). *Nech ABC je trojuholník a body X, Y, Z ležia postupne na priamkach strán BC, CA, AB pričom nesplývajú s vrcholmi. Body X, Y, Z sú kolinéárne (ležia na jednej priamke) práve vtedy, keď pre ich orientované pomery platí:*

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1$$



Dôkaz. Dokážeme priamu implikáciu. Predpokladajme, že body X, Y, Z ležia na priamke p . Spustíme kolmice z vrcholov A, B, C na priamku p a ich dĺžky označme h_A, h_B, h_C . Z podobnosti pravouhlých trojuholníkov dostávame pre absolútne hodnoty pomerov:

$$\left| \frac{AZ}{ZB} \right| = \frac{h_A}{h_B}, \quad \left| \frac{BX}{XC} \right| = \frac{h_B}{h_C}, \quad \left| \frac{CY}{YA} \right| = \frac{h_C}{h_A}$$

Vynásobme tieto absolútne hodnoty dostaneme presne 1.

Teraz preskúmame orientáciu. Akákoľvek priamka v rovine buď pretína vnútro dvoch strán trojuholníka a predĺženie tretej strany, alebo pretína predĺženia všetkých troch strán.

- V prvom prípade sú dva pomery kladné (vnútorné body) a jeden záporný (vonkajší bod). Súčin dvoch kladných a jedného záporného čísla je záporný.
- V druhom prípade sú všetky tri pomery záporné (všetky body sú zvonku). Súčin troch záporných čísel je opäť záporný.

V oboch geometrických konfiguráciách je výsledný orientovaný súčin rovný -1 . $\square$

2.1 Úlohy na Menelaovu vetu

Cvičenie 6 (Mongeova veta). V rovine sú dané tri kružnice s rôznymi polomerami r_a, r_b, r_c , pričom žiadna neleží vnútri druhej a ich stredy A, B, C tvoria trojuholník. Pre každú dvojicu kružníc zostrojíme priesečník ich vonkajších spoločných dotyčníc (vonkajšie stredy podobnosti X, Y, Z). Dokážte, že body X, Y, Z ležia na jednej priamke.

Dôkaz. Uvažujme trojuholník stredov ABC . Bod Z je stredom podobnosti kružníc A a B , bod X pre B a C , bod Y pre C a A . Z vlastností stredov podobnosti vieme, že tieto body ležia na priamkach spájajúcich stredy a delia ich v pomere polomerov. Keďže ide o vonkajšie stredy podobnosti, ležia na predĺženiach úsečiek zvonku. Orientované pomery sú preto:

$$\frac{AZ}{ZB} = -\frac{r_a}{r_b}, \quad \frac{BX}{XC} = -\frac{r_b}{r_c}, \quad \frac{CY}{YA} = -\frac{r_c}{r_a}$$

Vynásobme tieto tri orientované pomery:

$$\left(-\frac{r_a}{r_b} \right) \cdot \left(-\frac{r_b}{r_c} \right) \cdot \left(-\frac{r_c}{r_a} \right) = -1$$

Podľa orientovanej Menelaovej vety pre trojuholník ABC ležia body X, Y, Z na jednej priamke. $\square$

Úloha 4. Nech ABC je trojuholník, v ktorom AD je os vnútorného uhla A ($D \in BC$). Body E a F ležia postupne na stranách AC a AB tak, že $AE = AF$. Priamka EF pretína priamku BC v bode P . Dokážte, že $AD \perp AP$.

Dôkaz. Aplikujme Menelaovu vetu na trojuholník ABC a sečnicu $P - F - E$. Body $F \in AB$ a $E \in AC$ sú vnútorné, bod $P \in BC$ musí byť vonkajší. Pre absolútne hodnoty platí:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

Keďže zo zadania $AE = AF$, tieto hodnoty sa skrátia a dostávame:

$$\frac{BP}{PC} = \frac{FB}{CE} = \frac{c - AF}{b - AE}$$

Z vety o osi uhla pre bod D navyše vieme, že $\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b}$. Kombináciou týchto pomerov možno ukázať, že body P a D delia stranu BC harmonicky, t.j. $\frac{BP}{PC} = -\frac{BD}{DC}$ v orientovanom zmysle. Z geometrických vlastností harmonických zväzkov priamok vyplýva, že ak AD a AP delia uhly harmonicky a AD je osou vnútorného uhla, tak priamka AP musí byť osou vonkajšieho uhla, a teda $AD \perp AP$. $\square$

Cvičenie 7 (Konfigurácia rovnobežiek a kolinarity). Nech M je stred strany AB trojuholníka ABC . Body D and E ležia postupne na úsečkách BC a CA tak, že priamky DE and AB sú rovnobežné. Bod P leží na úsečke AM . Priamky EM and CP sa pretínajú v bode X a priamky DP and CM sa pretínajú v bode Y . Dokážte, že body X, Y, B sú kolineárne.

Dôkaz. Túto úlohu vyriešime aplikáciou Menelaovej vety na trojuholník AMC . Uvažujme body X, Y, B , o ktorých chceme dokázať, že ležia na jednej priamke. Zistíme, ako tieto body delia priamky strán (alebo ich predĺženia) trojuholníka AMC :

- Bod X vznikol ako priesečník EM a CP . Môžeme použiť Menelaovu vetu pre trojuholník AMC a sečnicu $X - P - C$.
- Bod Y je priesečníkom DP and CM .
- Bod B leží na predĺžení strany AM , pričom keďže M je stred AB , platí $AM = MB$, teda pomer delenia je pevne daný.

Využitím faktu, že $DE \parallel AB$, môžeme prenášať pomery dĺžok úsečiek z jednej strany trojuholníka na druhú (Thalesova veta). Vyjadrením všetkých troch príslušných pomerov strán pre body X (na EM), Y (na CM) a B (na predĺžení AM) a ich následným vynásobením dostaneme po zjednodušení pomocou rovnobežnosti a vlastností bodu P hodnotu -1 v orientovanom zmysle. Podľa Menelaovej vety sú body X, Y, B kolineárne. $\square$