

Rovnoľahlosť

Barbora Novosadová
barbora.novosadova@trojsten.sk

Definícia 1. Nech je daný bod S a reálne číslo $k \neq 0$. *Rovnoľahlosť so stredom S a koeficientom k* je zobrazenie v rovine, ktoré každému bodu $X \neq S$ priradí bod X' tak, že X' leží na polpriamke SX pre $k > 0$ a na polpriamke opačnej k SX pre $k < 0$, pričom $|SX'| = |k||SX|$. Bodu S je priradený bod $S' = S$.

Vlastnosti rovnoľahlosti:

- Obraz priamky v rovnoľahlosti je vždy rovnobežná priamka.
- Stred rovnoľahlosti je pevný bod.
- Medzi ľubovoľnými dvoma rovnobežnými úsečkami existuje práve jedna kladná a jedna záporná rovnoľahlosť. Všeobecne existuje rovnoľahlosť medzi dvoma podobnými mnohoúhľníkmi s rovnobežnými zodpovedajúcimi si stranami.
- Stred rovnoľahlosti, bod a jeho obraz ležia na priamke.
- Koeficient rovnoľahlosti je na základe zobrazenia vždy jednoznačne určený; stred je určený jednoznačne okrem identity.
- inverzným zobrazenám je rovnoľahlosť s rovnakým stredom a prevrátenou hodnотou koeficientu.
- stredová súmernosť = rovnoľahlosť s koeficientom -1 .
- každé podobné zobrazenie je rovnoľahlosť zložená so zhodným zobrazením.

Príklad 1. Vnútri štvorca $ABCD$ zvolíme bod X . Dokážte, že ťažiská trojuholníkov ABX , BCX , CDX , DAX tvoria štvorec.

Riešenie. Ťažisko delí ťažnicu vždy v pomere $2 : 1$. Takže obrazy ťažísk v rovnoľahlosti so stredom X a koeficientom $1,5$ sú stredy príslušných strán. Stredy strán tvoria štvorec, teda aj ťažiská, keďže sú ich vzorom v rovnoľahlosti.

Cvičenie 1. Dokážte, že päť výšok a stredy strán jedného trojuholníka ležia na spoločnej kružnici. **Hinty:** 1

Medzi dvoma kružnicami k, l existuje práve jedna kladná a práve jedna záporná rovnoľahlosť. Stredy týchto rovnoľahlostí sú priesečníky ich spoločných dotyčníc.

Otázka: Platí to vždy?

Cvičenie 2. Nájdite rovnoľahlosti medzi $(k, r), (l, s)$ pre rôzne $r = s, r \neq s$ a pre rôzne vzájomné polohy k, l (pretínajúce sa, nepretínajúce sa, vnútorný/vonkajší bod dotyku, sústredné...).

Príklad 2. Kružnice k, l majú vnútorný bod dotyku v bode T . Tetiva AB kružnice k sa dotýka kružnice l v bode U . Dokážte, že priamka UT je osou uhla ATB .

Riešenie. Označme K, L stredy kružníc k, l . Potom LU je kolmé na AB , keďže AB je dotyčnica. Rovnoľahlosť so stredom v T , ktorá zobrazuje l na k , zobrazuje bod U na taký bod U' na k , že KU' je kolmé na AB . Keďže AB je ťažnica, KU' je os úsečky, a teda $|BU'| = |AU'|$. Keďže U, U', T ležia na jednej priamke, dostávame

$$|\angle UTA| = |\angle U'TA| = |\angle U'BA| = |\angle U'AB| = |\angle U'TB| = |\angle UTB|.$$

Cvičenie 3. Kružnice k, l, m sa dotýkajú priamky p postupne v bodoch K, L, M . Navyše sa kružnice k, l dotýkajú v bode A , l, m sa dotýkajú v bode B . Dokážte, že priamky KA a MB sa pretínajú na kružnici l . Čo sa zmení, ak sa l nedotýka p ? **Hinty:** 2

Cvičenie 4. 1. Nech $ABCD$ je lichobežník s rovnobežnými stranami AB, CD , E nech je priesečník uhlopriečok. F, G sú také body ležiace mimo lichobežníka, že ABF a CDG sú rovnostranné trojuholníky. Dokážte, že body E, F, G ležia na priamke.

2. Je daný trojuholník ABC . Body dotyku úsečky BC s vpísanou a pripísanou kružnicou označme postupne D, E . Priamka AE pretne vpísanú kružnicu bližšie k bodu A v bode F . Dokážte, že DF je kolmá na BC .

3. Kružnice k, l majú vonkajší dotyk v bode T , navyše sa obe vnútorne dotýkajú kružnice m v bodoch postupne R, S . Druhý priesečník priamky RT s kružnicou m označme Q . Dokážte $|\angle TSQ| = 90^\circ$. **Hinty:** 3

1 Skladanie rovnoľahlostí

Tvrdenie 1. Majme dve rovnoľahlosti $h_1(S_1, k_1), h_2(S_2, k_2)$. Potom $h = h_1 \circ h_2$ je opäť rovnoľahlosť, jej koeficient je $k_1 \cdot k_2$ a jej stred leží na S_1S_2 , pokiaľ $S_1 \neq S_2$, inak $S_1 = S = S_2$.

Dôkaz. Obe zobrazenia sú podobné a zobrazujú rovnobežky na rovnobežky, aj ich zloženie bude také, teda rovnoľahlosť. Pre veľkosť úsečky bude platiť $|A'B'| = k_2(k_1 \cdot |AB|) = k_2k_1|AB|$. Pokiaľ $S_1 = S_2$, poloha S je zrejmá. Nech $S_1 \neq S_2$, označme p priamku S_1S_2 . Obe rovnoľahlosti h_1, h_2 zobrazia p na seba, keďže na nej ležia ich stredy. Pre všetky $X \in p$ teda $h(X) = X' \in p$, inak povedané $XX' = p$, lenže S, X, X' ležia na priamke, teda aj S leží na p . (Ak $X = X'$, nemáme síce $XX' = p$, ale našli sme pevný bod rovnoľahlosti, teda jej stred.) $\square$

Príklad 3. Kružnica l leží vo vnútri kružnice k a zvnútra sa jej dotýka. Uvažujme ľubovoľnú kružnicu m , ktorá má vnútorný dotyk s k v bode K a vonkajší dotyk s l v bode L . Dokážte, že KL prechádza pevným bodom nezávisle od polohy m . Čo ak l leží vo vnútri k , ale sa jej nedotýka?

Riešenie. Chceme nájsť nejakú rovnoľahlosť, ktorej stredom by mohol byť daný pevný bod. Vieme, že existuje záporná rovnoľahlosť, zobrazujúca k na l , a táto je nezávislá od polohy m . Zároveň, ak zložíme (kladnú) rovnoľahlosť, zobrazujúcu k na m , so zápornou, zobrazujúcou m na l , dostaneme rovnoľahlosť zobrazujúcu k na l , zápornú - teda tú, ktorá je nezávislá od m . Zároveň ale stred tohto zloženia leží na KL , keďže to sú postupne stredy použitých rovnoľahlostí.

Úloha 1. Mongeho veta. V rovine sú dané 3 nepretínajúce sa kružnice k, l, m . Označme K, L, M postupne priesečníky vonkajších spoločných dotyčníc kružníc l a m , k a m , k a l . Dokážte, že K, L, M ležia na priamke. **Hinty:** 4

Úloha 2. Kruh K s hraničnou kružnicou k je rozdelený 4 priamkami na 9 oblastí tak, že jednou z nich je štvorec $ABCD$. Do oblasti, ktorá má s štvorcom spoločný iba bod A , vpíšeme kružnicu k_a tak, aby sa dotýkala priamok AB, AD a kružnice k aby sa dotýkala v bode A' ; podobne definujeme B', C', D' . Dokážte, že priamky AA', BB', CC', DD' sa pretínajú v jednom bode. **Hinty:** 5

Cvičenie 5. 1. Nech k je kružnica opísaná trojuholníku ABC . Kružnica k_a sa dotýka priamok AB, AC a má vnútorný dotyk s k v bode A' . Podobne zostrojme B', C' . Ukážte, že AA', BB', CC', DD' sa pretínajú v jednom bode. **Hinty:** 6

2. Nech k_1, k_2, k_3 sú také kružnice, že žiadna neleží vo vnútri inej. Kružnica l má s nimi vnútorný dotyk postupne v bodoch A_1, A_2, A_3 , kružnica m má s nimi vonkajší dotyk v bodoch B_1, B_2, B_3 . Dokážte, že A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 sa pretínajú v jednom bode. **Hinty:** 7

3. Kružnice k, l majú vonkajší dotyk v bode T , navyše majú vnútorný dotyk s kružnicou m postupne v bodoch A, B . Spoločná dotyčnica k, l cez bod T pretne m v bode P . AP pretne k v bode X , BP pretne l v bode Y . Dokážte, že XY je spoločná dotyčnica k a l .

Poznámka Príklady a teória pochádzajú najmä z [Tkadlec·GZ·Prase], cvičenia odtiaľ alebo z [PavlĀηk·stejnolehlost·Prase].

Hinty

1. Obraz ortocentra v osovej súmernosti podľa srany trojuholníka leží na opísanej kružnici.
2. (a) Sprav si rovnobežku s p , ktorá sa dotýka l .
(b) Rovnoľahloti so stredom A , resp. B zobrazujú k , resp. m na l .
3. (a) Označ P prienik ST a m , ukáž, že PQ je priemer.
(b) Rovnoľahlosť z R , ktorá zobrazuje k na m , ide T na Q a K na M (stredy kružníc), využij rovnobežnosť úsečiek a to isté pre rovnoľahlosť z S .
4. Interpretujte dva z bodov ako stredy rovnoľahlostí a zložte tieto rovnoľahlosti - dostanete rovnoľahlosť so stredom v treťom bode.
5. Pozrite sa na zápornú rovnoľahlosť, zobrazujúcu kružnicu k na kružnicu vpísanú štvorcu $ABCD$. Interpretujte ju ako zloženie rovnoľahlostí, využívajúc "bočné" kružnice.
6. Kladná rovnoľahlosť zobrazujúca vpísanú kružnicu na opísanú.
7. Záporná rovnoľahlosť z m na l .