

Lagrangeove Multiplikátory

Michal Ilkovič

Tento materiál sa zaoberá metódou hľadania extrémov funkcie viacerých premenných s dodatočnou podmienkou (väzbou). Táto metóda sa ukazuje ako veľmi silný nástroj, ktorý je veľmi užitočný vo veľa oblastiach matematiky.

1 Teória

Než sa vrhneme k dôkazu vete o Lagrangových multiplikátoroch, zadefinujeme si pár dôležitých termínov z matematickej analýzy a dokážeme si pomocné vety.

1.1 Charakterizácia spojitosti

Definícia 1 (Vzor množiny). Pre funkciu $f: X \rightarrow Y$, kde $X \subset \mathbb{R}^N$ a $Y \subset \mathbb{R}^M$ (najčastejšie $Y \subset \mathbb{R}$), definujeme **vzor množiny** $B \subset Y$ ako

$$f^{-1}(B) = \{\mathbf{x} \in X; f(\mathbf{x}) \in B\}.$$

Všeobecne ide o iný pojem než inverzná funkcia (ktorú označujeme f^{-1} a ktorá je definovaná iba vtedy, ak je funkcia f prostá).

Definícia 2 (Okolie bodu v $\mathbb{R}^N$). Nech $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ a $\delta > 0$. Definujeme **kruhovité okolie** (alebo jednoducho okolie) bodu $\mathbf{x}$ s polomerom δ ako množinu

$$U(\mathbf{x}, \delta) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N; \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta\}$$

a **prstencové** (rýdze) **okolie** ako množinu

$$P(\mathbf{x}, \delta) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N; 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta\} = U(\mathbf{x}, \delta) \setminus \{\mathbf{x}\},$$

kde $\|\cdot\|$ označuje štandardnú euklidovskú normu v $\mathbb{R}^N$ (t. j. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2}$).

Definícia 3 (Spojitosť funkcie v bode). Nech $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Funkcia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sa nazýva **spojitá v bode $\mathbf{x}_0$** , ak platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0, \delta) \implies f(\mathbf{x}) \in U(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon).$$

Definícia 4 (Otvorená a uzavretá množina). Množina $A \subset \mathbb{R}^N$ sa nazýva **otvorená**, ak s každým svojím bodom obsahuje aj nejaké jeho okolie, teda:

$$\forall \mathbf{x} \in A \exists \delta > 0: U(\mathbf{x}, \delta) \subset A.$$

Množina $A \subset \mathbb{R}^N$ sa nazýva **uzavretá**, ak jej doplnok $A^c = \mathbb{R}^N \setminus A$ je otvorená množina.

Veta 1 (Charakterizácia spojitosti). *Nech $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je funkcia. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

- (1) f je spojitá,
- (2) pre každú otvorenú množinu $G \subset \mathbb{R}^m$ je jej vzor $f^{-1}(G) \subset \mathbb{R}^n$ otvorená množina,
- (3) pre každú uzavretú množinu $F \subset \mathbb{R}^m$ je jej vzor $f^{-1}(F) \subset \mathbb{R}^n$ uzavretá množina.

Dôkaz. (1) $\implies$ (2): Nech $G \subset \mathbb{R}^m$ je otvorená množina. Chceme dokázať, že $f^{-1}(G)$ je otvorená v $\mathbb{R}^n$, teda:

$$\forall \mathbf{x}_0 \in f^{-1}(G) \exists \delta > 0: U(\mathbf{x}_0, \delta) \subset f^{-1}(G).$$

Nech $\mathbf{x}_0 \in f^{-1}(G)$. Potom $f(\mathbf{x}_0) \in G$. Keďže G je otvorená, existuje $\epsilon > 0$ také, že $U(f(\mathbf{x}_0), \epsilon) \subset G$.

Zo spojitosti funkcie f v bode $\mathbf{x}_0$ vyplýva, že k tomuto $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0, \delta)$ platí $f(\mathbf{x}) \in U(f(\mathbf{x}_0), \epsilon)$. Teda:

$$f(U(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset U(f(\mathbf{x}_0), \epsilon) \subset G,$$

z čoho dostávame $U(\mathbf{x}_0, \delta) \subset f^{-1}(G)$.

(2) $\implies$ (1): Nech $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ a $\epsilon > 0$. Chceme ukázať, že existuje $\delta > 0$ také, že $f(U(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset U(f(\mathbf{x}_0), \epsilon)$.

Množina $U(f(\mathbf{x}_0), \epsilon)$ je otvorená. Podľa predpokladu (2) je jej vzor $f^{-1}(U(f(\mathbf{x}_0), \epsilon))$ otvorená množina. Keďže $\mathbf{x}_0$ patrí do tohto vzoru, z otvorenosti vyplýva existencia $\delta > 0$ takéhoto, že:

$$U(\mathbf{x}_0, \delta) \subset f^{-1}(U(f(\mathbf{x}_0), \epsilon)).$$

To znamená, že $f(U(\mathbf{x}_0, \delta)) \subset U(f(\mathbf{x}_0), \epsilon)$, čo dokazuje spojitosť.

(2) $\implies$ (3): Nech $F \subset \mathbb{R}^m$ je uzavretá množina. Chceme dokázať, že $f^{-1}(F)$ je uzavretá, teda že jej doplnok $(f^{-1}(F))^c$ je otvorená množina.

Platí:

$$\mathbf{x} \in (f^{-1}(F))^c \iff f(\mathbf{x}) \notin F \iff f(\mathbf{x}) \in F^c.$$

Teda $(f^{-1}(F))^c = f^{-1}(F^c)$. Keďže F je uzavretá, jej doplnok F^c je otvorená množina. Podľa predpokladu (2) je vzor $f^{-1}(F^c)$ otvorená množina. Tým pádom je $(f^{-1}(F))^c$ otvorená, čiže $f^{-1}(F)$ je uzavretá.

(3) $\implies$ (2): Dokazuje sa analogicky prechodom k doplnkom. □

Definícia 5. Množina $M \subset \mathbb{R}^N$ je obmedzená práve vtedy, keď existuje $C > 0$ také, že $|x_i| \leq C$ pre všetky $i = 1, \dots, N$ a každé $\mathbf{x} \in M$. Uzavretá množina má typicky tvar:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N; g(\mathbf{x}) \leq c\},$$

kde g je spojitá funkcia (ide o vzor uzavretej množiny).

Cvičenie 1. Dokážte z definície, že množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 3 \text{ a } |y| \leq 4\}$ (uzavretý obdĺžnik) je obmedzená.

Cvičenie 2. Dokážte z definície (cez otvorenosť doplnku), že množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0 \text{ a } y \geq 0\}$ (prvý kvadrant vrátane osí) je uzavretá.

Cvičenie 3. Dokážte, že množina $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x^2 + 3y^4 \leq 12\}$ je uzavretá a obmedzená (kompaktná).

Cvičenie 4. Dokážte, že množina $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 9 \text{ a } x + y + z = 1\}$ je uzavretá a obmedzená.

Cvičenie 5. Uvažujme množinu $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1\}$. Dokážte, že M je uzavretá, ale nie je obmedzená.

Veta 2 (Heineho charakterizácia spojitosti). *Nech $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je funkcia a $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:*

(1) f je spojitá v bode $\mathbf{x}_0$,

(2) pre každú postupnosť bodov $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ takú, že $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$, platí $f(\mathbf{x}_n) \rightarrow f(\mathbf{x}_0)$.

Dôkaz. (1) $\implies$ (2): Nech $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$ v $\mathbb{R}^n$. Chceme dokázať, že $f(\mathbf{x}_n) \rightarrow f(\mathbf{x}_0)$ v $\mathbb{R}^m$, čo podľa definície limity postupnosti znamená:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 \implies f(\mathbf{x}_n) \in U(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon).$$

Nech je $\varepsilon > 0$ dané ľubovoľne. Zo spojitosti funkcie f v bode $\mathbf{x}_0$ (tvrdenie 1) vyplýva, že k tomuto ε existuje $\delta > 0$ také, že:

$$\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0, \delta) \implies f(\mathbf{x}) \in U(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon).$$

Keďže platí $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$, k tomuto $\delta > 0$ vieme nájsť index $n_0 \in \mathbb{N}$ taký, že pre všetky $n \geq n_0$ platí $\mathbf{x}_n \in U(\mathbf{x}_0, \delta)$.

Celkovo teda pre všetky $n \geq n_0$ dostávame $f(\mathbf{x}_n) \in U(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon)$, čo dokazuje, že $f(\mathbf{x}_n) \rightarrow f(\mathbf{x}_0)$.

$\neg(1) \implies \neg(2)$ (**Dôkaz obmenou**): Predpokladajme, že neplatí tvrdenie (1), teda že funkcia f nie je spojitá v bode $\mathbf{x}_0$. Negácia definície spojitosti vyzerá nasledovne:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0, \delta): f(\mathbf{x}) \notin U(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon).$$

Zafixujme toto $\varepsilon > 0$. Keďže predchádzajúci výrok platí pre každé $\delta > 0$, môžeme postupne voliť $\delta = \frac{1}{n}$ pre $n = 1, 2, \dots$

Pre každé takéto $n \in \mathbb{N}$ dostávame existenciu bodu $\mathbf{x}_n$ takého, že:

$$\mathbf{x}_n \in U\left(\mathbf{x}_0, \frac{1}{n}\right) \quad \text{a súčasne} \quad f(\mathbf{x}_n) \notin U(f(\mathbf{x}_0), \varepsilon).$$

Týmto spôsobom sme skonštruovali postupnosť $\{\mathbf{x}_n\}$, pre ktorú zrejme platí $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$ (keďže ich vzdialenosť je menšia ako $\frac{1}{n} \rightarrow 0$).

Avšak pre funkčné hodnoty platí, že žiadne $f(\mathbf{x}_n)$ neleží v ε -okolí bodu $f(\mathbf{x}_0)$, z čoho vyplýva, že postupnosť $f(\mathbf{x}_n)$ nekonverguje k $f(\mathbf{x}_0)$. Tým sme ukázali, že neplatí ani tvrdenie (2). $\square$

1.2 Nutné podmienky existencie extrému

Veta 3 (Nutná podmienka existencie lokálneho extrému). *Nech $n \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená množina, $\mathbf{a} \in G$ a $i \in \{1, \dots, n\}$. Nech funkcia $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ má v bode $\mathbf{a}$ lokálny extrém. Potom buď $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ neexistuje, alebo platí*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0.$$

Dôkaz. Položme $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_i)$. Potom má g v bode 0 lokálny extrém, a teda derivácia $g'(0)$ buď neexistuje, alebo sa rovná 0. Odtiaľ vyplýva tvrdenie. $\square$

Veta 4 (Weierstrassova veta o obmedzenosti a extrémoch). *Nech $A \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdna, obmedzená a uzavretá množina a nech $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom platí:*

- (1) *Funkcia f je na množine A obmedzená, t. j. jej obraz $f(A) \subset \mathbb{R}$ je obmedzená množina.*
- (2) *Funkcia f nadobúda na množine A svoje globálne extrémny (globálne minimum a globálne maximum), t. j. existujú body $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in A$ také, že pre všetky $\mathbf{x} \in A$ platí:*

$$f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_1).$$

Dôkaz. Dôkaz tvrdenia (1) - Obmedzenosť: Dôkaz vykonáme sporom. Predpokladajme, že funkcia f nie je zhora obmedzená na množine A . Potom pre každé prirodzené číslo $m \in \mathbb{N}$ existuje bod $\mathbf{x}_m \in A$ taký, že $f(\mathbf{x}_m) > m$.

Tým získavame postupnosť bodov $\{\mathbf{x}_m\} \subset A$. Keďže množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je obmedzená a uzavretá, podľa Bolzano-Weierstrassovej vety z nej môžeme vybrať podpostupnosť $\{\mathbf{x}_{k_m}\}$, ktorá konverguje k nejakému bodu $\mathbf{x}_1 \in A$.

Pretože funkcia f je spojitá, podľa Heineho vety o spojitosti musí platiť, že $f(\mathbf{x}_{k_m}) \rightarrow f(\mathbf{x}_1)$ pre $m \rightarrow \infty$. Avšak z našej konštrukcie postupnosti vieme, že $f(\mathbf{x}_{k_m}) > k_m \rightarrow \infty$, čo znamená, že $f(\mathbf{x}_{k_m}) \rightarrow \infty$.

Dostávame spor, keďže limita postupnosti reálnych čísel nemôže byť súčasne konečné číslo $f(\mathbf{x}_1)$ aj nekonečno. Funkcia f je teda zhora obmedzená. Analogickým spôsobom (sporom s predpokladom $f(\mathbf{x}_m) < -m$) by sme dokázali, že f je obmedzená aj zdola. Obraz $f(A)$ je preto obmedzená množina v $\mathbb{R}$.

Dôkaz tvrdenia (2) - Existencia globálnych extrémov: Dokážeme existenciu globálneho maxima (dôkaz pre globálne minimum je úplne analogický). Označme množinu všetkých funkčných hodnôt ako $M = f(A) = \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in A\}$. Z predchádzajúceho bodu (1) vieme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je neprázdna a zhora obmedzená. Podľa axiómy suprema existuje jej supremum v $\mathbb{R}$, ktoré označíme $S = \sup M$.

Z vlastností suprema vyplýva, že ak zvolíme hodnotu $S - \frac{1}{m}$ (pre ľubovoľné $m \in \mathbb{N}$), táto už nie je horným ohraničením množiny M . Preto v množine A musí existovať bod $\mathbf{x}_m$ taký, že platí:

$$S - \frac{1}{m} < f(\mathbf{x}_m) \leq S.$$

Podľa vety o dvoch policajtoch odtiaľ priamo vyplýva, že $f(\mathbf{x}_m) \rightarrow S$ pre $m \rightarrow \infty$.

Keďže postupnosť $\{\mathbf{x}_m\}$ leží v obmedzenej a uzavretej množine $A \subset \mathbb{R}^n$, opäť podľa Bolzano-Weierstrassovej vety existuje vybraná podpostupnosť $\{\mathbf{x}_{k_m}\}$, ktorá konverguje k nejakému bodu $\mathbf{x}_1 \in A$.

Zo spojitosti funkcie f a Heineho vety vyplýva, že $f(\mathbf{x}_{k_m}) \rightarrow f(\mathbf{x}_1)$. Súčasne však vieme, že celá postupnosť $\{f(\mathbf{x}_m)\}$ konverguje k S , takže aj jej vybraná podpostupnosť musí konvergovať k S , teda $f(\mathbf{x}_{k_m}) \rightarrow S$.

Z jednoznačnosti limity v $\mathbb{R}$ dostávame:

$$f(\mathbf{x}_1) = S = \sup M.$$

Pretože $\mathbf{x}_1 \in A$ a S je supremom všetkých hodnôt funkcie na množine A , platí $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_1)$ pre každé $\mathbf{x} \in A$. Bod $\mathbf{x}_1$ je teda hľadaným globálnym maximom. $\square$

Definícia 6 (Funkcia triedy C^1 / Spojite diferencovateľná funkcie). *Nech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená množina. Funkcia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva **triedy C^1** (alebo **spojite diferencovateľná**) na množine Ω , ak platí:*

- (1) V každom bode množiny Ω existujú všetky parciálne derivácie prvého rádu funkcie f , t. j. existujú funkcie

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

pre všetky $i = 1, \dots, n$.

- (2) Tieto parciálne derivácie sú ako funkcie premennej $\mathbf{x}$ **spojité** na celej množine Ω .

Množinu všetkých takýchto funkcií označujeme ako $C^1(\Omega)$.

Veta 5 (O implicitne zadanej funkcii). *Nech $N, k \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ je otvorená množina, $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}$, $(\mathbf{a}, b) \in \Omega$ a nech platí:*

$$(a) \quad F \in C^k(\Omega),$$

$$(b) \quad F(\mathbf{a}, b) = 0,$$

$$(c) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a}, b) \neq 0.$$

Potom existuje okolie $U \subset \mathbb{R}^N$ bodu $\mathbf{a}$ a okolie $V \subset \mathbb{R}$ bodu b tak, že $U \times V \subset \Omega$ a pre každé $\mathbf{x} \in U$ existuje práve jedno $y \in V$ s vlastnosťou $F(\mathbf{x}, y) = 0$. Ak označíme toto y symbolom $Y(\mathbf{x})$, tak $Y \in C^k(U)$ a platí

$$\frac{\partial Y}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, Y(\mathbf{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, Y(\mathbf{x}))}, \quad \text{kde } i \in \{1, \dots, N\} \text{ a } \mathbf{x} \in U.$$

Dôkaz. **Existencia Y .** Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{a}, b) > 0$. Vďaka spojitosti funkcie $\frac{\partial F}{\partial y}$ v bode $(\mathbf{a}, b)$ nájdeme $\delta_1 > 0$ a $\Delta_1 > 0$ také, že

$$\forall (\mathbf{x}, y) \in B(\mathbf{a}, \delta_1) \times [b - \Delta_1, b + \Delta_1]: \frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}, y) > 0.$$

Funkcia $t \mapsto F(\mathbf{a}, t)$ je rastúca na $[b - \Delta_1, b + \Delta_1]$. Máme preto

$$F(\mathbf{a}, b - \Delta_1) < 0 \quad \text{a} \quad F(\mathbf{a}, b + \Delta_1) > 0.$$

Vďaka spojitosti F nájdeme $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ také, že

$$\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta_2): F(\mathbf{x}, b - \Delta_1) < 0 \wedge F(\mathbf{x}, b + \Delta_1) > 0.$$

Položme $U = B(\mathbf{a}, \delta_2)$ a $V = (b - \Delta_1, b + \Delta_1)$. Zvoľme $\mathbf{x} \in U$. Funkcia $t \mapsto F(\mathbf{x}, t)$ je na $[b - \Delta_1, b + \Delta_1]$ rastúca, spojitá a splňa $F(\mathbf{x}, b - \Delta_1) < 0$ a $F(\mathbf{x}, b + \Delta_1) > 0$. To znamená, že existuje práve jedno $y \in (b - \Delta_1, b + \Delta_1)$ také, že $F(\mathbf{x}, y) = 0$.

Spojitosť Y . Zvoľme $\mathbf{x}^* \in U$. Budeme dokazovať, že Y je spojitá v $\mathbf{x}^*$. Zvoľme $\varepsilon > 0$. Položme

$$\Omega^* = U \times ((Y(\mathbf{x}^*) - \varepsilon, Y(\mathbf{x}^*) + \varepsilon) \cap V)$$

a $F^* = F|_{\Omega^*}$. Potom je Ω^* otvorená a platí

$$F^* \in C^k(\Omega^*), \quad F^*(\mathbf{x}^*, Y(\mathbf{x}^*)) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F^*}{\partial y}(\mathbf{x}^*, Y(\mathbf{x}^*)) > 0.$$

Podľa už dokázaného existujú okolie $U^* \subset \mathbb{R}^N$ bodu $\mathbf{x}^*$ a okolie $V^* \subset \mathbb{R}$ bodu $Y(\mathbf{x}^*)$ také, že $U^* \times V^* \subset \Omega^*$ a

$$\forall \mathbf{x} \in U^* \exists ! y \in V^* : F^*(\mathbf{x}, y) = 0.$$

Odtiaľ vyplýva

$$Y(U^*) \subset V^* \subset (Y(\mathbf{x}^*) - \varepsilon, Y(\mathbf{x}^*) + \varepsilon).$$

Tým je dokázaná spojitosť Y v bode $\mathbf{x}^*$.

Platí $Y \in C^1(U)$. Zvoľme $i \in \{1, \dots, N\}$ a $\mathbf{x}^* \in U$. Nájdeme $\delta > 0$ a $\rho > 0$ také, že $B(\mathbf{x}^*, \delta) \subset U$, $Y(B(\mathbf{x}^*, \delta)) \subset V$ a

$$B(\mathbf{x}^*, \delta) \times Y(B(\mathbf{x}^*, \delta)) \subset B((\mathbf{x}^*, Y(\mathbf{x}^*)), \rho) \subset \Omega.$$

Zvoľme $t \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$. K nemu nájdeme $\xi(t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ ležiace na úsečke spájajúcej body $(\mathbf{x}^*, Y(\mathbf{x}^*))$ a $(\mathbf{x}^* + t\mathbf{e}_i, Y(\mathbf{x}^* + t\mathbf{e}_i))$ také, že pomocou vety o strednej hodnote platí

$$0 = F(\mathbf{x}^* + t\mathbf{e}_i, Y(\mathbf{x}^* + t\mathbf{e}_i)) - F(\mathbf{x}^*, Y(\mathbf{x}^*)) = \nabla F(\xi(t)) \cdot (t\mathbf{e}_i, Y(\mathbf{x}^* + t\mathbf{e}_i) - Y(\mathbf{x}^*)).$$

Teda platí

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi(t)) \cdot t + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi(t))(Y(\mathbf{x}^* + t\mathbf{e}_i) - Y(\mathbf{x}^*)).$$

Odtiaľ vyplýva, že

$$\frac{Y(\mathbf{x}^* + t\mathbf{e}_i) - Y(\mathbf{x}^*)}{t} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\xi(t))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi(t))}.$$

Platí $\lim_{t \rightarrow 0} \xi(t) = (\mathbf{x}^*, Y(\mathbf{x}^*))$, lebo

$$\|\xi(t) - (\mathbf{x}^*, Y(\mathbf{x}^*))\| \leq |t| + |Y(\mathbf{x}^* + t\mathbf{e}_i) - Y(\mathbf{x}^*)| \rightarrow 0 \quad \text{pre } t \rightarrow 0.$$

Teda

$$\frac{\partial Y}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*, Y(\mathbf{x}^*))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\mathbf{x}^*, Y(\mathbf{x}^*))}. \quad (1)$$

Platí $Y \in C^k(U)$. Pre $k = 1$ sme tvrdenie už dokázali. Predpokladajme, že platí pre nejaké $k - 1$, kde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Zobrazenie $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, Y(\mathbf{x}))$ je teda triedy $C^{k-1}(U)$. Funkcie $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_N}, \frac{\partial F}{\partial y}$ sú triedy $C^{k-1}(\Omega)$, a teda podľa vety o zloženej funkcii a vzťahu (1) sú tiež funkcie $\frac{\partial Y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial Y}{\partial x_N}$ triedy $C^{k-1}(U)$. Preto je Y triedy $C^k(U)$. $\square$

Cvičenie 6. Uvažujme rovnicu $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$ a bod $A = [3, 4]$.

- Overte, že v okolí bodu A rovnica implicitne definuje funkciu $y = f(x)$.
- Pomocou vzorca pre implicitnú deriváciu vypočítajte hodnotu $y'(3)$.

Riešenie. Máme funkciu $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25$ a bod $A = [3, 4]$.

- Overíme predpoklady:

- $F(3, 4) = 3^2 + 4^2 - 25 = 9 + 16 - 25 = 0$.
- Vypočítame parciálne derivácie: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$ a $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$.
- V bode A máme $\frac{\partial F}{\partial y}(3, 4) = 2 \cdot 4 = 8 \neq 0$.

Predpoklady sú splnené, rovnica v okolí bodu A implicitne definuje funkciu $y = f(x)$.

(b) Použijeme vzorec pre deriváciu:

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

Dosadením súradníc bodu $A = [3, 4]$ dostávame:

$$y'(3) = -\frac{3}{4}.$$

Cvičenie 7. Funkcia $y = f(x)$ je v okolí bodu $B = [0, 1]$ implicitne zadaná rovnicou $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0$. Vypočítajte deriváciu $y'(0)$ pomocou parciálnych derivácií funkcie F .

Riešenie. Zadaná rovnica je $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0$ a bod $B = [0, 1]$.

- Overenie bodu: $F(0, 1) = 0^3 + 1^3 - 3(0)(1) - 1 = 0$.
- Vypočítame parciálne derivácie:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

- Dosadíme bod $B = [0, 1]$ do parciálnych derivácií:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1) = 3(0)^2 - 3(1) = -3, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = 3(1)^2 - 3(0) = 3 \neq 0.$$

Aplikujeme vzorec:

$$y'(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0, 1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1)} = -\frac{-3}{3} = 1.$$

Cvičenie 8. Uvažujme rovnicu $F(x, y) = e^y + x - y - 1 = 0$ v okolí bodu $C = [0, 0]$.

- Overte predpoklady vety o implicitnej funkcii (t. j. že $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) \neq 0$).
- Vypočítajte $y'(0)$ pomocou vzorca $-\frac{F_x}{F_y}$.

Riešenie. Máme $F(x, y) = e^y + x - y - 1$ a bod $C = [0, 0]$.

(a) Overenie predpokladov:

- $F(0, 0) = e^0 + 0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$.
- Parciálne derivácie sú: $\frac{\partial F}{\partial x} = 1$ a $\frac{\partial F}{\partial y} = e^y - 1$.
- V bode C dostávame $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = e^0 - 1 = 0$.

Pozor! Keďže $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$, základná veta o implicitnej funkcii sa v tomto bode nedá použiť na vyjadrenie $y = f(x)$ a derivácia $y'(0)$ pomocou tohto vzorca **neexistuje** (menovateľ by bol nulový).

Cvičenie 9. Rovnica $F(x, y) = \ln(y) + x^2y - 1 = 0$ definuje v okolí bodu $D = [1, 1]$ implicitnú funkciu $y = f(x)$. Určte hodnotu jej derivácie $y'(1)$.

Riešenie. Zadaná rovnica je $F(x, y) = \ln(y) + x^2y - 1 = 0$ a bod $D = [1, 1]$.

- Overenie bodu: $F(1, 1) = \ln(1) + 1^2 \cdot 1 - 1 = 0 + 1 - 1 = 0$.
- Spočítame parciálne derivácie:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{y} + x^2.$$

- Dosadíme bod $D = [1, 1]$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1) = 2(1)(1) = 2, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = \frac{1}{1} + 1^2 = 2 \neq 0.$$

Použitím vzorca dostávame:

$$y'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1)} = -\frac{2}{2} = -1.$$

Cvičenie 10. Zistite, či rovnica $F(x, y) = \sin(x) + \cos(y) - 1 = 0$ definuje v okolí bodu $E = [\pi, \frac{\pi}{2}]$ implicitnú funkciu $y = f(x)$, a ak áno, nájdite hodnotu $y'(\pi)$.

Riešenie. Máme $F(x, y) = \sin(x) + \cos(y) - 1 = 0$ a bod $E = [\pi, \frac{\pi}{2}]$.

- Overenie bodu: $F(\pi, \frac{\pi}{2}) = \sin(\pi) + \cos(\frac{\pi}{2}) - 1 = 0 + 0 - 1 = -1 \neq 0$.

Záver: Keďže samotný bod E nespĺňa zadanú rovnicu ($F(\pi, \frac{\pi}{2}) \neq 0$), hľadaná krivka týmto bodom vôbec neprechádza. Otázka na implicitnú funkciu a jej deriváciu v tomto bode preto **nemá zmysel**.

Veta 6 (O Lagrangeových multiplikátoroch). *Nech $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a $\phi : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sú funkcie triedy C^1 , pričom G je otvorená množina. Nech $M = \{\mathbf{x} \in G \mid \phi(\mathbf{x}) = 0\}$ je množina určená väzbou a $\nabla\phi(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ pre všetky $\mathbf{x} \in M$. Ak má funkcia f v bode $\mathbf{a} \in M$ lokálny extrém vzhľadom na množinu M , potom existuje číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ také, že:*

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda \nabla \phi(\mathbf{a})$$

Definícia 7 (Lagrangeova funkcia). Pre uľahčenie výpočtov definujeme:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda \phi(\mathbf{x})$$

Extrém hľadáme riešením sústavy $n + 1$ rovníc: $\nabla L = \mathbf{0}$.

Dôkaz. Dôkaz sa opiera o vetu o implicitnej funkcii. Podľa predpokladu je $\nabla g(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že parciálna derivácia podľa poslednej premennej je nenulová, teda $\frac{\partial g}{\partial x_N}(\mathbf{a}) \neq 0$.

Zavedme značenie: bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ zapíšeme ako $\mathbf{x} = (\bar{\mathbf{x}}, x_N)$, kde $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$, a podobne pre bod $\mathbf{a}$ označme $\mathbf{a} = (\bar{\mathbf{a}}, a_N)$, kde $\bar{\mathbf{a}} = (a_1, \dots, a_{N-1})$.

Aplikujeme vetu o implicitnej funkcii (Veta 2) na rovnicu $g(\bar{\mathbf{x}}, x_N) = 0$. Z nej vyplýva, že existuje okolie $U(\bar{\mathbf{a}}, \delta) \subset \mathbb{R}^{N-1}$, okolie $U(a_N, \Delta) \subset \mathbb{R}$ a funkcia $\varphi : U(\bar{\mathbf{a}}, \delta) \rightarrow U(a_N, \Delta)$ triedy C^1 taká, že pre body z tohto okolia platí:

$$g(\bar{\mathbf{x}}, x_N) = 0 \iff x_N = \varphi(\bar{\mathbf{x}}).$$

Množina M sa teda na okolí bodu $\mathbf{a}$ zhoduje s grafom funkcie φ .

Pre $\bar{\mathbf{x}} \in U(\bar{\mathbf{a}}, \delta)$ definujme pomocnú funkciu

$$h(\bar{\mathbf{x}}) = f(\bar{\mathbf{x}}, \varphi(\bar{\mathbf{x}})).$$

Keďže bod $\mathbf{a}$ je lokálnym extrémom funkcie f na množine M , je zrejmé, že bod $\bar{\mathbf{a}}$ je voľným lokálnym extrémom funkcie h .

Podľa nutnej podmienky existencie lokálneho extrému (Veta 1) musí platiť $\nabla h(\bar{\mathbf{a}}) = \mathbf{0}$, čiže

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{a}}) = 0 \quad \text{pre } i = 1, \dots, N-1. \quad (2)$$

Rozpíšme parciálne derivácie funkcie h pomocou reťazového pravidla pre derivovanie zloženej funkcie:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{x}}, \varphi(\bar{\mathbf{x}})) + \frac{\partial f}{\partial x_N}(\bar{\mathbf{x}}, \varphi(\bar{\mathbf{x}})) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{x}}).$$

Dosadením $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{a}}$ a s využitím faktu, že $\varphi(\bar{\mathbf{a}}) = \mathbf{a}_N$, takže $(\bar{\mathbf{a}}, \varphi(\bar{\mathbf{a}})) = \mathbf{a}$, dostávame

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{a}}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_N}(\mathbf{a}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{a}}). \quad (3)$$

Ďalej z dôkazu vety o implicitnej funkcii (Veta 5) vieme, že pre deriváciu funkcie φ platí:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{a}}) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{a})}{\frac{\partial g}{\partial x_N}(\mathbf{a})}. \quad (4)$$

Položme teraz

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_N}(\mathbf{a})}{\frac{\partial g}{\partial x_N}(\mathbf{a})}.$$

Tvrdíme, že $\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda \nabla g(\mathbf{a})$, čo znamená $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ pre všetky $i = 1, \dots, N$. Overme toto tvrdenie:

- Pre $i = N$ tvrdenie vyplýva ihneď z definície čísla λ .
- Pre $i \in \{1, \dots, N-1\}$ dosadíme vzťah (4) do rovnice (3) a využijeme (2):

$$0 = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{a}}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_N}(\mathbf{a}) \left(-\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{a})}{\frac{\partial g}{\partial x_N}(\mathbf{a})} \right).$$

Zoskupením a použitím definície λ dostávame:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{a}).$$

Tým je tvrdenie $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ dokázané pre všetky i a dôkaz je hotový. $\square$

Dôsledok 6.1. Podľa predchádzajúcej vety sú podozrivými bodmi z extrému body, kde:

- (1) funkcie f, g nie sú hladké,
- (2) $\nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, čo zodpovedá situácii, kedy množina Γ (všeobecne $(N-1)$ -dimenzionálna hladká plocha) môže degenerovať,
- (3) konečné body, kde platí vzťah, v ktorom sú gradienty f a g lineárne závislé.

Cvičenie 11. Nájdite extrémy $f(x, y) = x + y$ na jednotkovej kružnici $x^2 + y^2 = 1$.

Riešenie. $L(x, y, \lambda) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. 1. $L_x = 1 - 2\lambda x = 0 \implies x = \frac{1}{2\lambda}$ 2. $L_y = 1 - 2\lambda y = 0 \implies y = \frac{1}{2\lambda}$ 3. $x^2 + y^2 = 1 \implies \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \implies 2\lambda^2 = \frac{1}{2} \implies \lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Body: $A = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ (maximum) a $B = [-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ (minimum).

2 Geometrická motivácia

Predstavme si problém hľadania extrémov funkcie $f(x, y)$ za podmienky (väzby), že bod (x, y) musí ležať na krivke definovanej rovnicou $\phi(x, y) = 0$. Kľúčová úvaha:

- Uvažujme vrstevnice funkcie f , teda množiny $L_k = \{(x, y) \mid f(x, y) = k\}$.
- Hľadáme najvyššiu (alebo najnižšiu) hodnotu k takú, aby sa vrstevnica L_k dotýkala väzby $\phi(x, y) = 0$.
- V bode extrému musia byť dotyčnice vrstevnice a väzby rovnobežné. To znamená, že ich normálové vektory (gradienty) musia byť kolineárne.

Matematicky to vyjadríme ako:

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla \phi(x, y)$$

kde λ je neznámy skalár, ktorý nazývame **Lagrangeov multiplikátor**.

3 Príklady

Úloha 1. Aké je maximum výrazu $x + y$ za podmienky $x^2 + y^2 = 4$?

Úloha 2. Aké je minimum výrazu $x + y$ za podmienky $xy = -1$?

Úloha 3. Aké je maximum výrazu xy za podmienky $x^2 + xy + y^2 = 1$?

Úloha 4. Aké je maximum a minimum výrazu $8x^2 - 2y$ za podmienky $x^2 + y^2 = 1$?

Úloha 5. Ktorý bod na priamke $3x - 5y + 7 = 0$ má najmenšiu vzdialenosť od počiatku?

Úloha 6. Krabica (teda kváder bez hornej podstavy) má povrch 12 m^2 , aký najväčší môže mať objem?

Úloha 7. Dokážte, že pre všetky reálne a, b splňajúce $a + b = 4$ platí $ab \leq 4$.

Úloha 8. Ktorý bod elipsy $2x^2 + xy + y^2 = 4$ má minimálnu vzdialenosť od počiatku?

Úloha 9. Aké je maximum a minimum x^2y za podmienky $x + 2y^2 = 6$?

Úloha 10. Nájdite najmenšiu vzdialenosť medzi priamkou $y = x - 2$ a parabolou $y = x^2$. Tento problém možno formulovať ako minimalizáciu $d^2(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ s dvoma väzbami: $g_1 = y_1 - x_1^2 = 0$ a $g_2 = y_2 - x_2 + 2 = 0$.

Úloha 11. Určte rozmery kvádra s najväčším objemom, ktorý je vpísaný do elipsoidu:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Úloha 12. Uvažujte funkciu $f = xy - 2z(x^2 + y^2)$ na množine $M \subset \mathbb{R}^3$, určené podmínkami

$$M = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \cap \{z \geq 0\}$$

(i) načrtnúte obrázek M

(ii) určete body podezrelé z extrému uvnitř M

(iii) určete body podezřelé z extrému na jednotlivých částech hranice M

(iv) ukažte, že globální extrémy f na M existují

Není nutno vyšetřovat podmínky 2. řádu (Hessova matice); není nutno dopočítávat, kde konkrétně se extrémy nabývají.

Úloha 13. Uvažujte funkci $f = 4x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 3yz$ na množině $M \subset \mathbb{R}^3$, definované

$$M = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

(i) načrtněte obrázek M

(ii) vyšetřete (lokální) extrémy uvnitř M

(iii) určete body podezřelé z extrému na hranici M

(iv) ukažte, že globální extrémy f na M existují

Není nutno dopočítávat, které z nalezených bodů jsou těmito extrémy.