

1 Úvod

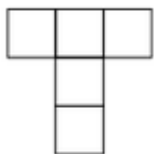
Tento materiál k prednáške obsahuje 1. krátky pokec na úvod 2. zoznam ilustračných úloh 3. návody k úlohám 4. komentáre k úlohám 5. zdroje.

Ilustratívnosť úloh spočíva v tom, že aby bolo možné pokryť pestrú škálu kombinatorických úloh v rozsahu 3-hodinovej prednášky, z každého "typu" úloh sa sem zmestil najviac jeden zástupca. Aj tak je teória hier, teória grafov a enumeratívna kombinatorika úplne vynechaná. Každá ilustračná úloha sa priamo vyskytla vo vysokých kolách MO, a ukazuje na nejakú užitočnú taktiku pri riešení (o ktorej odporúčam si vypočítať celú dlhú prednášku alebo prerátať viac príkladov). Na konci je výber ďalších úloh, ktoré by človek po prejení prednášky mohol zvládnuť.

2 Zoznam úloh

1. Hľadanie ťažkej konštrukcie

Nech n je kladné celé číslo, kde $n \geq 3$. Uvažujme štvorčekový papier s rozmermi $n \times n$, ktorého jednotlivé štvorčeky môžu mať buď bielu, alebo čiernu farbu. V každom kroku zmeníme farby piatich štvorčekov, ktoré tvoria útvar na obrázku v ľubovoľnom natočení. Na začiatku sú všetky štvorčeky biele. Rozhodnite, pre ktoré n možno po konečnom počte krokov dosiahnuť to, že všetky štvorčeky budú čierne.

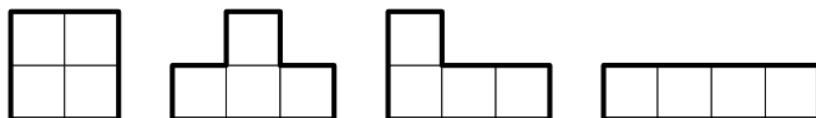


2. Univerzálna konštrukcia

Nájdite všetky kladné prirodzené čísla n s nasledujúcou vlastnosťou: Vo štvorcovej tabuľke $n \times n$ sa dá vyfarbiť $2n$ políčok tak, že žiadne z nich nesusedia stranou ani vrcholom a v každom riadku aj každom stĺpci sú vyfarbené práve 2 políčka.

3. Optimalizácia konštrukcie

Určte najväčšie prirodzené číslo n také, že ľubovoľnú sanu n tetromín, z ktorých každé je jedného zo štyroch tvarov na obrázku, možno vez prekrývania umiestniť do tabuľky 20×20 tak, že každé tetromino pokrýva práve štyri políčka tabuľky. Jednotlivé tetrominá je dovolené ľubovoľne otáčať a preklápať.



4. Double counting

V tabuľke $n \times n$ je v každom políčku napísané číslo vyjadrujúce, v koľkých pravouholníkoch sa vyskytuje. Dokážte, že súčet čísel v celej tabuľke je druhá mocnina prirodzeného čísla.

5. Pokročilé využitie invariantov

Máme nezafarbenú tabuľku $n \times n$ a dané prirodzené číslo m . V jednom ťahu môžeme vždy zobrať nejakých m susedných políčok v jednom riadku alebo stĺpci, a každé prefarbiť:

- Ak je dané políčko nezafarbené zafarbíme ho
- Ak je dané políčko zafarbené, odfarbíme ho. Zmení sa teda na nezafarbené.

Dokážte, že zafarbiť políčka je možné práve vtedy ak m je deliteľom n .

6. Monovariant

Na každú s n tabuliek sme napísali nejaké celé číslo. V jednom kroku môžeme vziať ľubovoľné dve tabuľky s rovnakým číslom, jednej pričítať 1 a jednej odčítať 1. Môže sa niekedy stať, že po nenulovom, ale konečnom počte ťahov skončíme s rovnakými číslami na tabuľkách? S akými číslami by sme mali začínať?

7. Analytické metódy

Obdĺžniková podlaha je pokrytá dlaždicami typov 2×2 a 1×4 . Jedna sa ale rozbila a nahradili sme ju dlaždicou druhého typu. Dokážte, že novými dlaždicami sa ani po ľubovoľnom preskladaní nebude dať plocha vydlaždiť.

8. Rekurencie

Na chodbe máme postupne izby 1, 2, ..., n . Do každej ubytujeme jedno číslo od 1 do n . Na dvere každej izby napíšeme súčin čísla izby a ubytovaného hosťa. Platí že čísla sú na chodbe v neklesajúcom poradí. Koľkými možnosťami sme mohli čísla ubytovať?

9. Zložité ofarbovanie

Máme plochu 2018×2018 políčok. Dokážte, že po odstránení ľubovoľných dvoch políčok z riadka sa zvyšná plocha nebude dať vydlaždiť týmito dielikmi:



Potešte sa vyriešením minulých celoštátok

10:

Alica a Bohuš hrajú hru na pláne so 72 políčkami rozmiestnenými po obvode kruhu. Na začiatku Bohuš položí na niektoré políčka po jednom žetóne. V každom kole najskôr Alica zvolí jedno prázdne políčko a Bohuš potom naň musí posunúť žetón z jedného susedného políčka. Ak to nedokáže, hra končí, inak nasleduje ďalšie kolo. Určte najmenší počet žetónov, pre ktorý Bohuš vie zabezpečiť, že v hre prebehne aspoň 2023 kôl.

11:

Koľkými spôsobmi vieme čísla z množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ popárovať do n dvojíc tak, aby súčet každej dvojice bol o jedna väčší ako mocnina čísla 2? Určite pre každé n .

12:

Na kôpke leží 100 diamantov, z ktorých 50 je pravých a 50 falošných. Pozvali sme svojrázneho znalca, ktorý jediný dokáže rozoznať, ktoré sú ktoré. Zakaždým, keď mu ukážeme nejakú trojicu diamantov, dva vyberie a (pravdivo) povie, koľko z nich je pravých. Rozhodnite, či môžeme zaručene odhaliť všetky pravé diamanty bez ohľadu na to, ako znalec volí posudzované dvojice.

13:

Každú postupnosť zloženú z n núl a n jednotiek priradíme číslo, ktoré je počtom úsekov rovnakých číslíc v nej. (Napríklad postupnosť 00111001 má 4 také úseky: 00, 111, 00, 1.) Pre dané n sčítame všetky čísla priradené jednotlivým takým postupnostiam. Dokážte, že výsledný súčet je rovný

$$(n+1) \binom{2n}{n}.$$

3 Návod

Ak chceš, návody sa dajú čítať veta po vete. Vieš tak dostať menšie nápovedy miesto rovno pointy riešenia. Celé vzorové riešenia sa dajú dohľadať podľa zdroja (ak má zdroj).

1. Akýkoľvek získaný útvar vieš použiť na prepínanie miesto T-čka, a skladať z neho nové, stačí použiť postupnosť krokov na jeho získanie. Aké malé rozumné útvary vieš získať v nekonečnej mriežke (skús klásť T-čka tak, aby sa čo najviac vynulovali)? Ak vieš robiť štvorce 2×2 a 3×3 , vieš z toho začieniť všetky papiere $2k \times 2k$ a $3k \times 3k$ (okrem 3×3 - dokáž). Skonstruuj ofarbenie, ktorým dokážeš, že ostatné nejdú. Takéto ofarbenie by malo obsahovať 3 farby tak, aby T-čko robilo nejaký invariant. Stačí invariantný zvyšok. Ako to dovedieš k sporu práve keď $2 \nmid n$ ani $3 \nmid n$?

2. Rozober malé prípady. Použi dirichleta. Predstav si veľmi veľkú tabuľku, ako by si ju začal vypĺňať zhora (zľava)? Pre aké najmenšie n vieš takýto postup aplikovať?

3. Ohranič zhora triviálne, potom určite to ešte klesne, využij nejakú ofarbovaciu taktiku. Teraz vymysliť taktiku ukladania, ktorá bude vždy vychádzať. Dosiahni 100% zaplnenosť políčok okrem pár posledných dielikov na konci (zvyškov), ktoré sa vyriešia. Napríklad z T-čok poskladáš štvorec 4×4 .

4. Chceš to celé zrátať jedným jednoduchým vzorcom. Rátaj koľko existuje dvojíc štvorec - políčko v ňom. Vieme, že ľavý kraj obdĺžnika je vždy viac naľavo ako vybraté políčko, a pravý kraj viac napravo. Aby sa vyriešil problém s "degenerovanými" prpadmi, chceš sa zaujímať o stĺpec/riadok ktorý je tesne zvonka obdĺžnika. Koľko stupňov voľnosti potrebuješ vybrať z každého z 2 rozmerov, aby si jednoznačne určil dvojicu? $n+2$ nad tromi je pekné kobinačné číslo.

5. Premenná v riešení by mala byť aj to, aké ofarbenie použijeme (koľko farieb bude mať). Chceš, aby sa ti zmenila parita počtu zafarbených každej farby, ako bude toto spor? Nezabudni na konštrukciu.
6. Po prvom kroku vzniknú čísla, ktorých je viac ako na začiatku. Čo bude výsledkom snahy to opraviť? Skús počítat' priemerný rozdiel od nejakého čísla.
7. Ťažisko tabuľky je fixne dané. Ako sa vypočíta spoločné ťažisko všetkých dlaždíc? Vie sa súčet súradníc stredov dlaždíc nezmeniť?
8. Pozri sa na malé prípady, a potom skús ďalší preskúmať tak, že použiješ už získané pozorovania o menších prípadoch. Môže sa číslo ubytovať v izbe s číslom o 2 iným? Vyjadri rekurentný vzťah, ako odpoveď stačí vyjadriť matematicky známou funkciou/postupnosťou.
9. Skús jednoducho, dvoma farbami. Dieliky majú výhodu, že po otočení sa ich rozloženie z globálneho hľadiska moc nemení. Pri odstránení jedného políčka by úloha bola ľahšia, pri dvoch musíš udržať dva-krát silnejší invariant. Zafarbi 2 riadky veľa seba rovnakou farbou.
10. Môže to vyzerat' ako teória hier, ale pre dobrú taktiku pre Bouša bude stačiť dvojfarbenie. Následne sa aj bude jednodušie ukazovať, že menej žetónov stačiť nebude. Alica bude zachovávať monovariant.
11. Môže to vyzerat' ako enumeračná úloha, ale pozri sa na to od čísla $2n$. Aké bude mať možnosti? Aké ďalšie čísla to musia mať podobne, a čo ostane pri zvyšku čísel?
12. Skúsený riešiteľ zas môže vidieť teóriu hier. Stačí však skonštruovať minimálnu funkčnú stratégiu. Čo ak by si znalec dal za cieľ, aby sme konkrétne 2 diamanty nevedeli od seba nikdy odlíšiť?
13. Skús počítat' nie úseky ale body, v ktorých sa menia. Koľko je postupností s daným bodom zmeny? Spomeň si na základné identity o kombinačných číslach.

4 Komentáre

1. Pri hľadaní konštrukcie sa často oplatí na to ísť jednoducho a modulárne. Najmagickejší moment je jednoznačne odhadnúť, kedy už všetko potrebné mám skonštruované, a môžem ísť dokazovať.
2. Toto je podľa mňa jedna zo škaredších MO úloh, no aj taký je život olympionika. Služí ako ukážka toho, že v niektorých úlohách treba naozaj iba pomerne prvoplánovo ale systematicky prísť so silnou konštrukciou, a ošetriť detaily. Často čím jednoduchšia a účelovejšia je, tým viac nás posunie k doriešeniu úlohy.
3. Tu sa znova hľadá balans medzi tým, čoho sa vieme triviálne zbaviť, a doriešením. Vždy je dobré hľadať prvky konštrukcie, ktorými sa nám úloha redukuje. Ľahšie sa nám bude potom premostovať medzi konštrukciou a dôkazom.

4. Pokročilé enumeračné úlohy málokedy opisujú situáciu a pýtajú sa na počet. Tak ako tu, opis situácie si musíme vytvoriť vlastný, aby sme dokázali tvrdenie o počte. V zásade vždy to znamená, že ideme hľadať bijekciu medzi možným výsledkom nejakej pomerne jednoduchšej kombinatorickej operácie (kombinácie, permutácie...) a všetkými povolenými prípadmi zo zadania. Double counting sa ale často dá použiť ako silné kladivo aj v iných prípadoch.

5. Aj v olympiáde sa dajú stretnúť úlohy, kde sa abstraktne pracuje s invariantami a ofarbovaním. Tu sa v zásade blížime k niečomu takému, že iba dokazujeme, že bude existovať nejak nakonštaný dôkaz, ktorý vedie k sporu. Takéto komplikácie sa často dobre riešia zovšeobecňovaním veľmi konkrétnych príkladov. Využívame pri tom mnoho stupňov voľnosti v podobe viacerých typov invariantov (napr. uvažujeme iba paritu vhodne vybraných farieb).

6. Ťažké úlohy nebývajú založené primárne na monovariante, ale je to užitočný spôsob, ako si skrátiť dokazovanie niektorých tvrdení ktoré znejú veľmi očividne, ale bez prehnaného formalizmu sa pri nich môžeme pripraviť o body.

7. Toto je naozaj pokročilé kladivo, ktoré sa často dá obísť (aj tu, cez štvorfarbenie). Nie je moc univerzálne, skôr ilustruje dosť iný, prísne matematický prístup ku na prvý pohľad viac hravým kombinatorickým úlohám. Často ho chceme hľadať, ak to nevieme naformulovať, ale vidíme, že "ono to proste vždy nevyjde rovnakým spôsobom". Zaujímavé je, že keď sa na to pozrieme hlbšie, a cez teóriu čísel a zvyšky mod 4 súradníc stredov políčok, ich ťažiská a priemery, dostaneme matematiku ktorá je ekvivalentná s tým, keby sme chceli ofarbovať prístup spísať úplne formálne (aké súradnice majú políčka s farbou 1...).

8. Akékoľvek lineárne úlohy s peknými malými prípadmi sa oplatí aspoň skúsiť riešiť rekurentne. Ide to úplne prirodzene snahou riešiť už netriviálne prípady, alebo sa môžeme aj cielene zamyslieť, ako závisí prípad $n+1$ s prípadom n (prípadne ďalšími). Zadania takýchto úloh potom vyzerajú buď tak, že rekurencia je rozumne vyjadriteľná konvenčným výrazom, alebo sa úloha pýta na pomerne vysoké, ale vypočítateľné n .

9. Na medzinárodnej úrovni sa celkom vyskytnú takéto advanced kombá, kde natipovať dokazovaciu taktiku a jej konkrétne prevedenie je takmer nemožné. V úlohe je možno prekvapivo celkom dosť hintov, ktoré sa dajú analyzovať, aby sme prišli s nápadmi ktoré bude treba. Hlavne nejaká tá symetria dielikov (možnosť farbiť celé riadky) a počet odstránených políčok (potreba ísť až na mod 4). To riešenie sa vcelku dá vyskladať kombináciou jednoduchších riešení ktoré už vieme mať natrénované.

5 Zdroje

1. CKMOA 2022/2023 - 6
2. CKMOA 2023/2024 - 5
3. CKMOA 2023/2024 - 3
4. MKS 2009/2010 3-7
5. KMS 2015/2016 Z2-7
6. Známe, bez zdroja
7. Vlastné / upravené z viacerých zdrojov

Ako zriešiť kombinatoriku na celoštátnu
Daniel Teplan

Prednáška
Letná škola matematiky 2026

- 8. Vlastné, inšpirované starým KMS
- 9. MEMO 2018 I-2
- 10. CKMOA 2022/2023 - 1
- 11. CPSJ 2025/2026 I-1
- 12. CKMOA 2016/2017 - 1
- 13. CKMOA 2016/2017 - 4