

Entropia úlohy

July 16, 2026

Poznámka: X je náhodný jav, ktorý môže nadobúdať konečný počet hodnôt.

1 Dokážte nasledujúcu charakterizáciu entropie (t.j. $H_1 = H_2$):

$H_1(X) = \sum_x P(X = x) \log(\frac{1}{P(X=x)})$ a $H_2(X)$ je spojitá funkcia, ktorá náhodnej premennej priradí kladné reálne číslo, spĺňajúca axiómy:

- $H_2(X, Y) = H_2(Y) + H_2(X|Y)$
- $\max_{|X|=n}(H_2(X))$ nastane pre X rovnomerne rozdelenú na n prvkoch.
- pridaním javov s nulovou pravdepodobnosťou, či premenovaním javov, sa entropia nezmení
- $H_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1$

Návod:

- indukciou dokážte $H_2(X_1, \dots, X_k) = \sum_{i=1}^k H_2(X_i|X_{<i})$
- $H_2(\frac{1}{2^k}, \dots, \frac{1}{2^k}) = k$
- Pre $n > m$ platí $H_2(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) > H_2(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$
- Pre ľubovoľne veľké r sa dá nájsť $n, m : 2^n \geq r \cdot k \geq 2^m$. Odvoďte z toho, že $H_2(\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}) = \log_2(k)$
- Ak X nadobúda racionálne hodnoty, tak sa dá nájsť spoločný menovateľ a vhodná uniformná náhodná premenná. Rozdeliť do krabičiek, použiť prvý axióm a odvodiť vzorček ako pre H_1 .
- zo spojitosti to už platí pre ľubovoľné X .

2 Hru hrajú Alica a Bob. Bob si vymyslí náhodnú premennú X na hodnotách $[n]$ (povie ju Alicke), "hodí si podľa nej kockou". Alica sa snaží zistiť hodnotu, a to tak, že si niekoľkokrát vyberie podmnožinu n a Bob jej povie, či číslo, ktoré mu padlo, je vo vybranej podmnožine alebo nie. Dokážte, že priemerne sa Alica musí opýtať aspoň $H(X)$ -krát.

3 Nech A, B sú náhodné premenné s hodnotami v $[n]$. Povieme, že A je textpositkondenzovanejšia ako B , ak pre každé $k \in [n] : \sum_{i=1}^k p_i \geq \sum_{i=1}^k q_i$, pričom $p_1, \dots, p_k$ a $q_1, \dots, q_k$ sú pravdepodobnosti náhodných premenných A , resp. B , zoradené vzostupne. Potom $H(A) \leq H(B)$.

- 4 Ak zobrazíme uniformne náhodne ľubovoľný strom, dobre ofarbený červenou a modrou, s n hranami na bipartitný graf G s červenou A a modrou B partitou, pričom $|E(G)| = \alpha AB$, tak pravdepodobnosť, že ide o homomorfizmus grafov, je aspoň α^n .
- 5 Dajte príklad dvojice náhodných premenných X, Y a $y \in Y$, že $H(X|Y = y) > H(X)$. Paradox: potom však $H(X|Y) < H(X)$ (tzn. z Y sa niečo o X dozvieme).
- 6 Nech $X_1, \dots, X_r$ sú náhodné premenné a nech $p_1, \dots, p_r$ sú nezáporné reálne čísla so súčtom 1. Náhodnú premennú X definujeme tak, že najprv vyberieme index i s pravdepodobnosťou p_i a potom vygenerujeme premennú X_i . Dokážte, že

$$H(X) \geq \sum_{i=1}^r p_i H(X_i),$$

pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď majú náhodné premenné $X_1, \dots, X_r$ rovnaké rozdelenie.

- 7 Nech A je konečná množina a nech X a Y sú náhodné premenné nadobúdajúce hodnoty v A . Pre každé $a \in A$ označme

$$p_a = P(X = a), \quad q_a = P(Y = a).$$

Kullbackova–Leiblerova divergencia je definovaná vzťahom

$$D_{\text{KL}}(X \| Y) = \sum_{a \in A} p_a \log \left(\frac{p_a}{q_a} \right).$$

1. Dokážte, že $D_{\text{KL}}(X \| Y)$ je vždy nezáporná a je rovná nule práve vtedy, keď majú X a Y rovnaké rozdelenie.
2. Ukážte, že $D_{\text{KL}}(X \| Y)$ a $D_{\text{KL}}(Y \| X)$ sa môžu líšiť.
3. Dokážte, že

$$I[X : Y] = D_{\text{KL}}((X, Y) \| (X \otimes Y)),$$

kde $X \otimes Y$ označuje náhodnú premennú získanú tak, že vyberieme $(a, b) \in A^2$ s pravdepodobnosťou $p_a p_b$ (teda za predpokladu, že X a Y sú nezávislé).

- 8 Loomisova–Whitneyho nerovnosť. Nech $A \subseteq X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ je konečná množina. Pre každé $i \in \{1, \dots, n\}$ označme $\pi_i(A)$ projekciu množiny A na všetky súradnice okrem i -tej. Potom platí

$$|A|^{n-1} \leq \prod_{i=1}^n |\pi_i(A)|.$$