

Diofantické rovnice

Jakub Krivošík

Rozkladanie

Úloha 1. Nájdite všetky $a, b \in \mathbb{N}$ také, že $a^2 = 4b^2 + 13$. **Hinty:** ??

Úloha 2. Nájdite všetky $a, b \in \mathbb{N}$ také, že $a^2 + 6ab + 8b^2 + 3a + 6b = 2$. **Hinty:** ??

Úloha 3. Nájdite všetky $a, b \in \mathbb{N}$ také, že $(ab - 7)^2 = a^2 + b^2$. **Hinty:** ??

Úloha 4. Pre každé kladné celé číslo n , nech $s(n)$ je počet usporiadaných dvojíc (x, y) takých, že $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$. Nájdite všetky n také, že $s(n) = 5$. **Hinty:** ??

Úloha 5. Nech p, q sú rôzne prvočísla. Nájdite počet usporiadaných dvojíc celých čísel x, y takých, že $\frac{p}{x} + \frac{q}{y} = 1$. **Hinty:** ??

Úloha 6. Nájdite všetky n také, že rovnica $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = n$ je riešiteľná. **Hinty:** ??

Modulá

Úloha 7. Nájdite všetky prvočísla p, q také, že $p^2 = 2q^2 + 1$. **Hinty:** ??

Úloha 8 (USAJMO 2011/1). Nájdite všetky n , pre ktoré je $2^n + 12^n + 2011^n$ štvorec. **Hinty:** ??

Úloha 9. Riešte pre $a, b \in \mathbb{N}$ rovnicu $3^a - 2^b = 1$. **Hinty:** ??

Úloha 10 (KMS 45/L3/6). Nájdite všetky $m, n \in \mathbb{N}$ také, že $3n^2 + 3n + 7 = m^3$. **Hinty:** ??

Úloha 11 (ISL 2002 N1). Nájdite najmenšie n také, že existujú kladné celé $x_1, x_2, \dots, x_n$ také, že

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 2002^{2002}$$

Hinty: ??

Úloha 12 (IMO 2006/4). Nájdite všetky dvojice celých čísel (x, y) , takých, že:

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

Hinty: ??

Úloha 13 (USA TST 2008/4). Dokážte, že $n^7 + 7$ nikdy nie je štvorec prirodzeného čísla. **Hinty:** ??

Úloha 14 (TSTST 2017/4). Nájdite všetky $a, b, c, n \in \mathbb{N}$ také, že $2^a + 3^b + 5^c = n!$ **Hinty:** ??

Úloha 15 (ISL 2006 N5). Nájdite všetky $a, b \in \mathbb{N}$ také, že:

$$\frac{a^7 - 1}{a - 1} = b^5 - 1$$

Hinty: ??

Úloha 16. Riešte pre $a, b \in \mathbb{N}$ rovnicu $2^a - 5 = 11^b$. **Hinty:** ??

Úloha 17 (Austria 2023/4). Nájdite všetky $n, k \in \mathbb{N}$, že $n! + n = n^k$. **Hinty:** ??

Úloha 18 (China 2005/6). Nájdite všetky nezáporné celé a, b, c, d , také že:

$$2^a 3^b - 5^x 7^d = 1$$

Hinty: ??

Viazanie medzi mocniny

Úloha 19. Nájdite všetky $a, b \in \mathbb{N}$, že $a^2 = 4b^2 + 3b + 2$. **Hinty:** ??

Úloha 20 (MO 59-A-III-1). Nájdite všetky $a, b \in \mathbb{N}$, že $a^2 = 4^b + 4b^2 + 4$. **Hinty:** ??

Úloha 21. Nájdite všetky $a, b \in \mathbb{N}$ také, že $(a + 1)^4 = (a - 1)^4 + b^3$. **Hinty:** ??

Úloha 22. Dokážte, že pre ľubovoľné celé a, b, c existuje nejaké prirodzené n , také, že

$$\sqrt{n^3 + an^2 + bn + c}$$

nie je prirodzené číslo. **Hinty:** ??

Nekonečný zostup

Úloha 23. Nájdite všetky $a, b, c \in \mathbb{N}$, také že $a^3 + 3b^3 + 9c^3 = 3abc$. **Hinty:** ??

Úloha 24. Majme $n \in \mathbb{Q}$, dokáž, že $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \iff n = k^2, k \in \mathbb{Q}$. **Hinty:** ??

Úloha 25 (APMO 1998/2). Dokážte, že pre všetky $a, b \in \mathbb{N}$ platí, že číslo $(a + 36b)(36a + b)$ nie je mocninou 2. **Hinty:** ??

Úloha 26. Majme $a, b, c \in \mathbb{N}$, také, že $a^2 + b^2 + 1 = abc$. Dokážte, že ak má rovnica riešenie, tak potom $c = 3$ a nájdite potom všetky riešenia. **Hinty:** ??

Pell

Úloha 27 (ISL 1999 N3). Dokážte, že existujú dve striktne rastúce postupnosti a_n a b_n také, že $a_n(a_n + 1)$ delí $b_n^2 + 1$ pre každé n . **Hinty:** ??

Úloha 28. Dokážte, že existuje nekonečne veľa n takých, že $n^2 + 1$ delí $n!$. **Hinty:** ??

Úloha 29 (ISL 2016 N5). Nech a je kladné celé číslo také, že nie je štvorec a majme rovnicu:

$$k = \frac{x^2 - a}{x^2 - y^2}$$

Nech A je množina všetkých kladných celých čísel k takých, že daná rovnosť má celočíselné riešenie také, že $x > \sqrt{a}$. Ďalej nech B je množina všetkých kladných celých čísel k takých, že daná rovnosť má celočíselné riešenie také, že $0 \leq x < \sqrt{a}$. Dokážte, že $A = B$. **Hinty:** ??

Úloha 30 (EGMO 2016/6). Nech S je množina všetkých kladných celých čísel n takých, že n^4 má deliteľa v $n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, n^2 + 2n$. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvkov v S v tvare $7m, 7m + 1, 7m + 2, 7m + 5, 7m + 6$ a že žiadne prvky v S nie sú v tvare $7m + 3$ alebo $7m + 4$, kde m je celé číslo. **Hinty:** ??

Vieta jumping

Úloha 31. Dokážte, že existuje nekonečne veľa dvojíc kladných celých čísel m, n takých, že

$$\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}$$

je kladné celé číslo. **Hinty:** ??

Úloha 32. Nech a a b sú celé čísla. Dokážte, že ak

$$\frac{a^2 + b^2}{ab - 1}$$

je celé číslo, tak je to štvorec celého čísla. **Hinty:** ??

Úloha 33 (HMMT 2017 A8). Nech a a b sú kladné celé čísla také, že

$$c = \frac{(a+b)(a+b+1)}{ab}$$

je celé číslo. Nájdite všetky možné hodnoty c . **Hinty:** ??

Úloha 34 (IMO 2003/2). Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel a, b takých, že

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

je kladné celé číslo. **Hinty:** ??

Úloha 35. Nech a a b sú kladné celé čísla. Nájdite všetky možné hodnoty výrazu

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab}$$

keď má celočíselnú hodnotu. **Hinty:** ??

Úloha 36 (Romania TST 2004/6). Keď a a b sú kladné celé čísla také, že $ab \neq 1$, tak definujeme

$$f(a, b) = \frac{a^2 + ab + b^2}{ab - 1}$$

Nájdite všetky možné celočíselné hodnoty f môže nadobúdať. **Hinty:** ??

Úloha 37 (ISL 2017 N6). Nájdite najmenšie kladné celé n , alebo dokážte, že neexistuje také n , že existuje nekonečne veľa rôznych n -tíc kladných racionálnych čísel $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ takých, že:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{a} \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

sú oboje celé čísla. **Hinty:** ??

Veľkosť

Úloha 38 (IMO 2022/5). Nájdite všetky trojice (a, b, p) takých, že p je prvočíslo a

$$a^p = b! + p$$

Hinty: ??

Úloha 39 (EGMO 2021/6). Existuje prirodzené číslo a , pre ktoré má rovnica

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

viac ako milión riešení pre prirodzené m, n ? **Hinty:** ??

Úloha 40 (ISL 2021 N5). Dokážte, že existuje len konečne veľa štvoríc (a, b, c, n) prirodzených čísel, pre ktoré platí:

$$n! = a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}$$

Hinty: ??