

# Grafové úlohy v olympiáde

Jakub Krivošík

**Definícia 1 (Graf).** Graf  $G$  je usporiadaná dvojica  $(V, E)$ , kde  $V$  je neprázdna konečná množina **vrcholov** (vertices) a  $E \subseteq \binom{V}{2}$  je množina **hrán** (edges). Hrana je neusporiadaná dvojica  $\{u, v\}$ , čo skrátene zapisujeme ako  $uv$ .

**Definícia 2 (Stupeň vrcholu).** Stupeň vrcholu  $v \in V$  (ozn.  $\deg(v)$ ) je počet hrán incidentných s vrcholom  $v$ .

**Definícia 3 (Cesta a cyklus).** Cesta dĺžky  $k$  v grafe  $G$  je postupnosť navzájom rôznych vrcholov  $v_0, v_1, \dots, v_k$  taká, že pre každé  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$  platí  $v_i v_{i+1} \in E$ . Dĺžka cesty zodpovedá počtu jej hrán.

**Cyklus** dĺžky  $k$  ( $k \geq 3$ ) je uzavretá cesta, teda postupnosť  $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_0$ , kde  $v_0, \dots, v_{k-1}$  sú rôzne vrcholy a všetky po sebe idúce dvojice sú spojené hranou.

**Definícia 4 (Špeciálne typy grafov).**

- **Súvislý graf:** Graf, v ktorom medzi každou dvojicou vrcholov existuje aspoň jedna cesta.
- **Strom:** Súvislý graf, ktorý neobsahuje žiadny cyklus.
- **Bipartitný graf:** Graf  $G = (V, E)$ , ktorého množinu vrcholov  $V$  vieme rozdeliť na dve disjunktné množiny  $A$  a  $B$  ( $V = A \cup B$ ) tak, že každá hrana  $e \in E$  má jeden koniec v  $A$  a druhý v  $B$ .
- **Rovinný (planárny) graf:** Graf, ktorý je možné nakresliť do roviny tak, že sa žiadne dve hrany nepretínajú mimo svojich koncových vrcholov.

**Cvičenie 1.** Dokážte, že graf  $G$  je bipartitný práve vtedy keď neobsahuje žiadne cykly nepárnej dĺžky.

**Cvičenie 2.** Dokážte, že graf  $G$  je bipartitný práve vtedy keď sa dajú ofarbiť jeho vrcholy dvomi farbami tak, že vrcholy rovnakej farby nie sú spojené hranou.

**Cvičenie 3.** Dokážte, že súvislý graf má kosť.

**Cvičenie 4.** Dokážte, že graf, ktorého každý vrchol má stupeň aspoň  $d$  obsahuje cyklus dĺžky aspoň  $d+1$ .

**Cvičenie 5.** Dokážte, že graf s nepárnym počtom vrcholov má párny počet vrcholov s nepárnym stupňom.

**Cvičenie 6.** Dokážte, že graf  $G$  s  $n$  vrcholmi, ktorý neobsahuje žiadny 4-cyklus obsahuje najviac  $O(n^{\frac{3}{2}})$  hrán.

**Cvičenie 7.** Nech  $G$  je graf s  $n$  vrcholmi. Dokážte, že dve z podmienok implikujú, že  $G$  je strom:

- $G$  je súvislý
- $G$  neobsahuje cykly
- $G$  má  $n - 1$  hrán

**Veta 1 (Ekvivalentné definície stromu).** Nech  $G = (V, E)$  je graf s  $|V| = n$  vrcholmi. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

- (i)  $G$  je strom (súvislý graf bez cyklov).
- (ii)  $G$  je súvislý a má presne  $n - 1$  hrán.
- (iii)  $G$  neobsahuje cykly a má presne  $n - 1$  hrán.
- (iv) Medzi každými dvoma vrcholmi v  $G$  existuje práve jedna cesta.

**Úloha 1.** Nech  $G$  je konečný graf taký, že každá hrana  $G$  má práve jeden koniec vo vrchole s nepárnym stupňom. Dokážte, že  $G$  má párny počet hrán. **Hinty: ??**

**Úloha 2.** Dokážte:

- Nech  $G$  je jednoduchý súvislý graf s množinou vrcholov  $V$  a hrán  $E$ , potom:

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|$$

- Nech  $G$  je orientovaný graf,  $\text{indeg } v$  značí počet hrán vstupujúcich do  $v$  a  $\text{outdeg } v$  je počet hrán vystupujúcich z  $v$ . Dokážte:

$$\sum_{v \in V} \text{indeg}(v) = \sum_{v \in V} \text{outdeg}(v) = |E|$$

- Nech  $G$  je kompletný orientovaný graf, kde každá hrana má najviac jeden smer, potom dokážte, že:

$$\sum_{v \in V} (\text{indeg}(v))^2 = \sum_{v \in V} (\text{outdeg}(v))^2$$

**Hinty: ??**

**Úloha 3.** Na oslave pozná každý 3 chalanov a 4 dievčatá. Koľko mohlo byť na oslave najmenej ľudí? **Hinty: ??**

**Úloha 4.** Majme konečný graf  $G$ , nech jeho najdlhšia cesta má dĺžku  $l$ . Dokážte, že ľubovoľné dve cesty dĺžky  $l$  zdieľajú aspoň jeden vrchol. **Hinty: ??**

**Úloha 5.** Nech  $G$  je kompletný orientovaný graf, kde každá hrana má najviac jeden smer, dokážte že v  $G$  existuje vrchol  $v$  taký, že pre každý iný vrchol  $w$  existuje cesta najviac dĺžky 2 z  $v$  do  $w$ . **Hinty: ??**

**Úloha 6 (IMO 1964/4).** Ofarbime hrany kompletného grafu o 17 vrchoch tromi farbami. Dokážte, že existuje jednofarebný trojuholník. **Hinty: ??**

**Úloha 7** (USAMO 1981/2). Každé dve mestá v krajine sú prepojené práve jedným typom prepravy: autobus, vlak alebo lietadlo. Každý z troch typov prepravy je použitý aspoň raz, ale každé mesto používa najviac dve prepravy. Koľko najviac miest môže byť v krajine? **Hinty:** ??

**Úloha 8.** Existuje v rovine 9 priamok takých, že ľubovoľná z nich sa pretína práve s 3 ďalšími priamkami? **Hinty:** ??

**Úloha 9.** Dokáž, že v ľubovoľnej skupine ľudí existuje dvojica ľudí taká, že obaja majú rovnako veľa kamarádov. **Hinty:** ??

**Úloha 10.** Na párty je  $n$  nosôb. Vieme, že medzi ľubovoľnými štyrmi osobami existujú tri osoby, ktoré sa poznajú každá s každou, alebo existujú tri osoby, medzi ktorými sa žiadne dve nepoznajú. Dokážte, že ich vieme rozdeliť na dve skupiny, kde v jednej skupine sa budú všetci poznať a v druhej skupine sa nikto nebude poznať. **Hinty:** ??

**Úloha 11.** Máme  $mn$  mrežových bodov usporiadaných do obdĺžnikovej siete  $m$  times  $n$  bodov. Spomedzi mrežových bodov je  $m + n$  bodov zafarbených načerveno. Každé dva červené body, ktoré sa nachádzajú v rovnakom riadku alebo v rovnakom stĺpci sú spojené červenou čiarou. Dokážte, že sa tam musí nachádzať uzavretá lomená čiara z červených spojnic. **Hinty:** ??

**Úloha 12** (PUMaC 2019 A1). Majme konečný graf  $G$ . Ako operáciu si definujeme vybranie nejakého cyklu  $C$ , pridanie vrcholu  $v$ , ktorý spojíme s každým vrcholom  $C$  a následne odstránime hrany cyklu  $C$ . Dokážte, že túto operáciu môžeme vykonať len konečný počet krát. **Hinty:** ??

**Úloha 13.** Nech  $n \geq 2$  je párne prirodzené číslo. Dokážte, že v každom strome  $T$  s  $n$  vrcholmi existuje hrana, ktorá spája dva vrcholy s párnym stupňom, alebo dva vrcholy s nepárnym stupňom. **Hinty:** ??

**Úloha 14** (ISL 2004 C3). Nasledujúca operácia je povolená na grafe: zoberme si ľubovoľný cyklus dĺžky 4 a vymažme jednu z jeho hrán z grafu. Pre fixné  $n \geq 4$  koľko najmenej hrán môže ostať po vykonaní niekoľkých operáciách na kompletom grafe o  $n$  vrchoch? **Hinty:** ??

**Úloha 15** (iKS 2023 C2). Pre graf  $G$  označme  $\mathcal{C}(G)$  množinu jeho cyklov. Pre každé  $n \geq 6$  určte všetky možné hodnoty:

$$\gcd(|C|), C \in \mathcal{C}(G)$$

kde  $G$  je graf o  $n$  vrchoch a všetky jeho vrcholy majú stupeň aspoň 3. **Hinty:** ??

**Úloha 16** (ISL 2021 C4). Kráľovstvo pozostáva z  $n$  miest. Pre každú dvojicu miest existuje práve jedna cesta medzi nimi, ktorá je jednosmerná. Hovoríme, že *trasa z  $X$  do  $Y$*  je postupnosť ciest z  $X$  do  $Y$  bez toho, aby sme sa do akéhokoľvek mesta znovu vrátili. Množina trás je *rozmanitá* ak žiadne dve cesty nezdieľajú cestu.

Nech  $A$  a  $B$  sú mestá, nech  $N_{AB}$  je najväčší možný počet rozmanitých trás z  $A$  do  $B$  a podobne si definujeme aj  $N_{BA}$ . Dokážte že rovnosť  $N_{AB} = N_{BA}$  nastáva práve vtedy keď počet ciest vychádzajúcich z  $A$  je rovnaký ako počet ciest vychádzajúcich z  $B$ . **Hinty:** ??

**Úloha 17** (ISL 2013 C3). Šialený fyzik objavil novú časticu, *imón*. Niektoré častice imónov sú *previazané* a každý imón môže byť previazaný s viacerými imónmi. Fyzik potom objavil, že môže vykonávať tieto typy operácií:

- Ak je imón previazaný s nepárnym počtom imónov, môže ho fyzik zničiť.

- Fyzik môže zdvojiť všetky imóny, čím za každý imón  $I$  vytvorí imón  $I'$ , ktoré sa previažu. Pričom imóny  $I'$  a  $J'$  sú previazané práve vtedy keď  $I$  a  $J$ .

Dokážte, že fyzik dokáže použiť operácie tak, aby žiadne dva imóny neboli previazané. **Hinty:** ??

**Úloha 18** (CKMO 2026/3). Povieme, že skupina ľudí je *trojznámostťová*, keď sa každý jej člen pozná presne s tromi ďalšími členmi a skupinu nie je možné rozdeliť na dve neprázdne časti tak, aby každý ich člen mal všetkých svojich známych vo svojej časti. (Vzťah známosti je vzájomný.) Určte najväčšie prirodzené číslo  $k$  také, že  $k \geq 3$  a existuje nenulové prirodzené číslo  $n$  také, že z každej trojznámostťovej skupiny aspoň s  $n$  ľuďmi sa dá vybrať aspoň  $k$  ľudí a posadiť ich k okrúhlemu stolu tak, že sa každý dvaja susedia poznajú. **Hinty:** ??

**Úloha 19.** V škole je  $n$  študentov. Jedného dňa chytí niekoľko študentov chrípku. Chrípka ovplyvní študenta na jeden deň, potom na ďalší deň získa imunitu (imunita nie je permanentná). V každom dni  $k$ , všetci zdravý študenti sa starajú o svojich chorých kamarádov a ochorejú na deň  $k + 1$ , pokiaľ neboli imunný v dni  $k$ .

- Dokážte, že chrípka eventuálne vyhynie (nikto ňou nebude nakazený).
- Predpokladajme, že sa jeden človek zaočkoval a teda získa imunitu na 1. deň. Dajte v takomto prípade príklad chrípky, že bude pokračovať do nekonečna.

**Hinty:** ??

**Úloha 20.** V KMS je niekoľko vedúcich a niektoré dvojice sa spolu kamarátia. Namiesto toho, aby si užívali pokojné Vianočné sviatky, sa radšej hádajú, či je krajšia fialová alebo modrá farba. Na začiatku si každý vedúci myslí, že krajšia je fialová. Občas sa stane, že jeden vedúci zorganizuje stretnutie a pozve naň všetkých svojich kamarátov. Po tomto stretnutí sa všetkým zúčastneným vedúcim zmení názor. Je možné, že po niekoľkých stretnutiach si budú všetci vedúci myslieť, že je krajšia modrá? (Bez ohľadu na to, ako sa vedúci kamarátia.)

**Hinty:** ??

**Úloha 21** (USAMO 2021/2). Krivoš išiel na túru do Tatier. Každá turistická cesta vedie medzi dvoma križovatkami, a cesty sa nekrižia inde ako na križovatkách. Z každej križovatky vedú presne tri cesty. Krivoš začne na niektorej križovatke a vyberie si prvú cestu, po ktorej pôjde. Keď natrafí na svoju prvú križovatku, zabočí doľava. Na druhej križovatke zas zabočí doprava, potom na tretej opäť doľava, a tak ďalej (striedavo zabáča doľava a doprava). Toto robí až dokým sa nevráti na svoju počiatočnú križovatku. Najviac koľkokrát vie Krivoš prejsť cez nejakú križovatku? **Hinty:** ??

**Úloha 22** (iKS 2024 C1). V iKSlandii je  $n$  miest. Každé dve mestá sú spojené obojsmernou leteckou linkou, ktorá je obsluhovaná práve jednou z troch leteckých spoločností. Miško by rád cestoval po iKSlandii, ale pretože je chudobný študent, môže si kúpiť mesačný lístok len od jednej ze spoločností. Nájdite najväčšie prirodzené  $k$  také, že si Miško vie bez ohľadu na to, ktoré spoje sú obsluhované ktorou spoločnosťou, vybrať jednu z nich a počiatočné mesto tak, aby mohol navštíviť aspoň  $k$  miest. **Hinty:** ??

**Úloha 23** (IMO 2019/3). Sociálna sieť má 2019 užívateľov, pričom niektoré dvojice sú kamaráti. Vždy keď je užívateľ  $A$  kamarát s užívateľom  $B$ , tak je aj  $B$  kamarát s  $A$ . Udalosti tohto typu sa môžu niekoľko krát stať, pričom sa deje jeden naraz nanajvýš:

- Troja užívatelia  $A, B, C$  taký, že  $A$  sa kamaráti s  $B$  a  $C$  a  $B$  a  $C$  sa nekamarátia zmenia svoje kamarátske vzťahy, teda  $B$  a  $C$  sa začnú kamarátiť a  $A$  sa prestane kamarátiť aj s  $B$ , aj s  $C$ .

Na začiatku 1010 užívateľov malo 1009 kamarátov každý a 1009 užívateľov malo 1010 kamarátov každý. Dokážte, že existuje postupnosť udalostí taká, že po jej konci má každý užívateľ nanajvyš jedného kamaráta. **Hinty: ??**

**Veta 2 (Eulerov ťah a cyklus).** *Nech  $G$  je súvislý graf.*

1.  $G$  obsahuje **eulerovský cyklus** (uzavretý ťah prechádzajúci každou hranou práve raz) práve vtedy, keď má každý vrchol v  $G$  párny stupeň.
2.  $G$  obsahuje **eulerovský ťah** (neuzavretý) práve vtedy, keď má graf presne dva vrcholy nepárneho stupňa.

**Úloha 24** (IMO 2020/3). Majme  $4n$  kamienkov s hmotnosťami  $1, 2, \dots, 4n$ . Každý z kamienkov je ofarbený jednou z  $n$  farieb tak aby z každej farby boli práve 4 kamienky. Dokážte, že kamienky môžeme rozdeliť do 2 skupín tak, aby obe podmienky boli splnené:

- Celkové hmotnosti skupiniek sú rovnaké.
- Každá skupinka obsahuje 2 kamienky z každej farby.

**Hinty: ??**

**Veta 3 (Euler).** *Pre každý súvislý rovinný graf s  $V$  vrcholmi,  $E$  hranami a  $F$  stenami platí:*

$$V - E + F = 2$$

**Cvičenie 8.** V každom jednoduchom rovinnom grafe s  $V \geq 3$  platí  $E \leq 3V - 6$ . Ak graf navyše neobsahuje trojuholníky, platí  $E \leq 2V - 4$ .

**Úloha 25** (ISL 2019 C4). Kráľ Artur postavil labyrint  $\mathcal{L}$  pozostávajúci z  $n$  stien, každá z nich je nekonečná rovinná čiara. Žiadne dve steny nie sú rovnobežné a žiadne tri steny nezdieľajú bod. Merlin potom ofarbí jednu stranu každej steny na červeno a druhú na modro.

Na prieniku dvoch stien existujú štyri rohy, dva protilahlé rohy, kde sa stretávajú červená a modrá strana, jeden s dvomi červenými stranami a jeden s dvomi modrými stranami stien. V každom takomto prieniku existujú jedny obojstranné dvere, ktoré spájajú diagonálne oproti sebe rohy, v ktorých sú dve rôzne farby.

Po tom, čo Merlin ofarbí steny, Morgana umiestni rytierov do labyrintu. Každý rytier môže prechádzať dverami, ale nesmie prechádzať cez steny.

Nech  $k(\mathcal{L})$  je najväčšie číslo  $k$  také, že bez ohľadu na to, ako ofarbí Merlin steny, Morgana vie umiestniť  $k$  rytierov do labyrintu  $\mathcal{L}$  tak, že žiadny dvaja sa nikdy nevidia stretnúť. Pre každé  $n$ , aké všetky hodnoty môže nadobúdať  $k(\mathcal{L})$ , kde labyrint  $\mathcal{L}$  má  $n$  stien? **Hinty: ??**

**Veta 4 (Mantel).** *Ak graf  $G$  na  $n$  vrcholoch neobsahuje ako podgraf trojuholník ( $K_3$ ), potom počet jeho hrán  $|E|$  spĺňa nerovnosť:*

$$|E| \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

*Rovnosť nastáva práve vtedy, keď  $G$  je úplný bipartitný graf  $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor}$ .*

**Veta 5 (Turán).** *Ak graf  $G$  na  $n$  vrcholoch neobsahuje úplný graf  $K_{r+1}$  ako podgraf, potom maximálny možný počet hrán je:*

$$|E| \leq \frac{r-1}{2r} n^2$$

*Graf, ktorý toto maximum dosahuje je úplný  $r$ -partitný graf, ktorého partície sú veľkostne čo najvyrovnannejšie.*

**Úloha 26.** Pre každé  $n \geq 1$  nájdite najväčší možný počet hrán ktorý môže mať graf s  $n$  vrcholmi, ktorý neobsahuje žiaden cyklus párnej dĺžky. **Hinty:** ??

**Úloha 27.** Majme v rovine 100 bodov. Koľko najviac dvojíc z nich môže byť vzdialených od seba v intervale  $(1, 2]$ ? **Hinty:** ??

**Úloha 28** (TSTST 2014/5). Nájdite najväčšie  $E$  také, že existuje hranovo ofarbený graf s  $E$  hranami a 60 vrcholmi taký, že jeho hrany sú buď červené, alebo modré tak, aby neexistoval žiaden jednofarebný cyklus dĺžky 3 alebo 5. **Hinty:** ??

**Úloha 29** (iKS 2024 C6). Daný je graf  $G = (V, E)$ , kde  $|V| = n > 1$ . Pre každú hranu  $e \in E$  nech  $c(e)$  je veľkosť najväčšieho úplného podgrafu, ktorý obsahuje  $e$ . Dokážte, že platí:

$$\sum_{e \in E} \frac{c(e)}{c(e) - 1} \leq \frac{n^2}{2}.$$

**Hinty:** ??

**Úloha 30** (China 2015/5). Majme 30 študentov takých, že každý má nanajvýš 5 kamarátov a medzi každými 5 študentmi existuje dvojica, ktorá sa nekamaráti. Nájdite najväčšie  $k$  také, že vždy existuje  $k$ -tica študentov, v ktorej sa nikto nekamaráti. **Hinty:** ??

**Úloha 31.** Majme dve prirodzené čísla  $n$  a  $\frac{n}{2} < k < n$ . A nech  $G$  je graf taký, že:

- $G$  neobsahuje žiadku  $k + 1$  kliku.
- Keď do  $G$  pridáme ľubovoľnú hranu, tak  $G$  bude obsahovať  $k + 1$  kliku.

Centrálnym vrcholom budeme rozumieť vrchol, ktorý je spojený s každým iným vrcholom  $G$ . Koľko najmenej centrálnych vrcholov môže  $G$  obsahovať? **Hinty:** ??

**Veta 6 (Ramsey).** Pre každú dvojicu nezáporných celých čísel  $r, s$  existuje najmenšie prirodzené číslo  $R(r, s)$  také, že ak zafarbíme hrany úplného grafu  $K_n$  ( $n \geq R(r, s)$ ) dvoma farbami (napr. červenou a modrou), potom  $G$  obsahuje buď červený úplný graf  $K_r$ , alebo modrý úplný graf  $K_s$ .

**Veta 7 (Ramsey s viac farbami).** Pre každú  $k$ -ticu nezáporných celých čísel  $q_1, q_2, \dots, q_k$  existuje najmenšie prirodzené číslo  $R(q_1, q_2, \dots, q_k)$  také, že ak zafarbíme hrany úplného grafu  $K_n$  ( $n \geq R(q_1, q_2, \dots, q_k)$ )  $k$  farbami (napr. farbami  $1, 2, \dots, k$ ), potom graf obsahuje úplný podgraf  $K_{q_i}$  zafarbený farbou  $i$  pre nejaké  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

**Veta 8 (Nekonečný Ramsey).** Nech  $r, k \in \mathbb{N}^+$  sú kladné prirodzené čísla. Nech  $X$  je nekonečná množina a nech

$$c : [X]^r \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$$

je zobrazenie definujúce  $k$ -farbenie všetkých  $r$ -prvkových podmnožín množiny  $X$ . Potom existuje nekonečná podmnožina  $Y \subseteq X$  taká, že množina  $[Y]^r$  je **monochromatická** (t.j. všetky  $r$ -pätice z množiny  $Y$  majú rovnakú farbu).

**Úloha 32** (Turkey 1998/3). Body kružnice sú ofarbené  $k$  farbami. Dokážte, že existuje nekonečne veľa rovnoramenných trojuholníkov, takých, že každý má všetky vrcholy rovnakej farby. **Hinty:** ??

**Úloha 33** (Schur's theorem). Dokážte, že pre ľubovoľné  $k$  existuje  $N$  také, že keď ofarbíme čísla  $1, 2, \dots, N$ ;  $k$  farbami, tak vieme nájsť  $x, y, z$  jednej farby také, že  $x + y = z$ . **Hinty:** ??

**Úloha 34.** Kúzelníci Hokus a Pokus majú kružnicu, v ktorej je jedna polkružnica modrá a druhá zelená. Behom predstavenia odíde Hokus z miestnosti, potom Pokus nechá divákov vyznačiť na kružnici 100 rôznych bodov. Pokus následne jeden bod vymaže. Potom sa vráti Hokus a len z pozícií 99 bodov určí, či bol vymazaný bod na modrej, alebo zelenej polkružnici. Dokážte, že im toto kúzlo nemôže vždycky výjsť. **Hinty: ??**

**Úloha 35.** Dokážte, že pre každé  $n$  existuje  $N$  také, že medzi ľubovoľnými  $N$  bodmi v obecnej polohe vieme nájsť  $n$  takých, že tvoria konvexný  $n$ -uholník. **Hinty: ??**

**Úloha 36** (2024 CTST P9). Ofarbíme každé kladné celé číslo jednou z farieb  $c_1, c_2, c_3, c_4$ . Dokážte, že existuje kladné celé  $n$  a  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  také, že spomedzi deliteľov  $n$ , počet deliteľov farby  $c_i$  je aspoň o 3 väčší ako počet deliteľov farby  $c_j$ . Dokážte, že pre ľubovoľné kladné celé  $A$  existuje kladné celé  $n$  a  $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$  také, že medzi všetkými deliteľmi  $n$ , farby  $c_i$  je aspoň o  $A$  viac ako farby  $c_j$ . **Hinty: ??**

**Veta 9 (Hall).** *Nech  $G = (A \cup B, E)$  je bipartitný graf. Párovanie, ktoré kompletne pokrýva množinu vrcholov  $A$ , existuje práve vtedy, keď pre každú podmnožinu  $S \subseteq A$  platí:*

$$|N(S)| \geq |S|$$

*kde  $N(S) \subseteq B$  je množina všetkých vrcholov, ktoré majú aspoň jedného suseda v množine  $S$ .*

**Úloha 37.** Dokážte, že ak má každý vrchol bipartitného grafu rovnaký stupeň, tak potom obsahuje perfektné párovanie. **Hinty: ??**

**Úloha 38.** Majme 2 papiere s rovnakým rozmerom s obsahmi 2026, a nech každý z nich je nejako rozdelený na 2026 súvislých oblastí s obsahom 1. Teraz tieto dva papiere položíme na seba aby sa perfektne prekryvali. Je možné zapichnúť 2026 špendlíkov do týchto prekrytých papierov tak, aby sme pretli všetkých 4052 oblastí? **Hinty: ??**

**Úloha 39.** Majme klasický balíček 52 kariet, teda 13 kariet z každej zo 4 farieb. Karty boli náhodne rozdelené do 13-tich kôpok po štyroch kartách. Dokážte, že si môžeme vybrať z každej kôpky jednu kartu tak, že celkovo vyberieme z každej hodnoty práve jednu kartu. **Hinty: ??**

**Úloha 40** (Canada 2006/3). V obdĺžnikovej mriežke  $m \times n$  sú napísané reálne čísla tak, že každý riadok, aj stĺpec obsahuje aspoň jedno kladné číslo. Ak sa riadok a stĺpec pretínajú v kladnom čísle, tak potom majú rovnaký súčet. Dokážte, že  $m = n$ . **Hinty: ??**

**Úloha 41** (Baltic Way 2013/6). Santa Klaus má aspoň  $n$  darčiekov pre  $n$  detí. Pre každé  $1 \leq i \leq n$  označíme  $x_i$  počet darčiekov, ktoré sa páčia  $i$ -temu dieťaťu. Predpokladajme, že:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \leq 1$$

Dokážte, že Santa Klaus vie rozdeliť darčekom deťom tak, že každé dieťa dostane darček, ktorý sa mu páči. **Hinty: ??**

**Úloha 42** (USAMO 2025/6). Nech  $m \geq n$  sú prirodzené čísla. Existuje  $m$  koláčikov rôznych príchuťí usporiadaných do kruhu a  $n$  fanúšikov koláčikov. Každý fanúšik priradí každému koláčiku nejaké nezáporné reálne skóre, podľa toho ako mu chutí daná príchuť koláčika. Predpokladajme, že pre každú osobu  $P$  je možné rozdeliť tento kruh na  $n$  súvislých úsekov tak, že súčet skóre, ktorým ich hodnotí  $P$  je v každom tomto úseku aspoň 1. Dokážte, že je možné rozdeliť týchto  $m$  koláčikov medzi fanúšikov tak, že každá osoba dostane koláčky so skóre aspoň 1. **Hinty: ??**